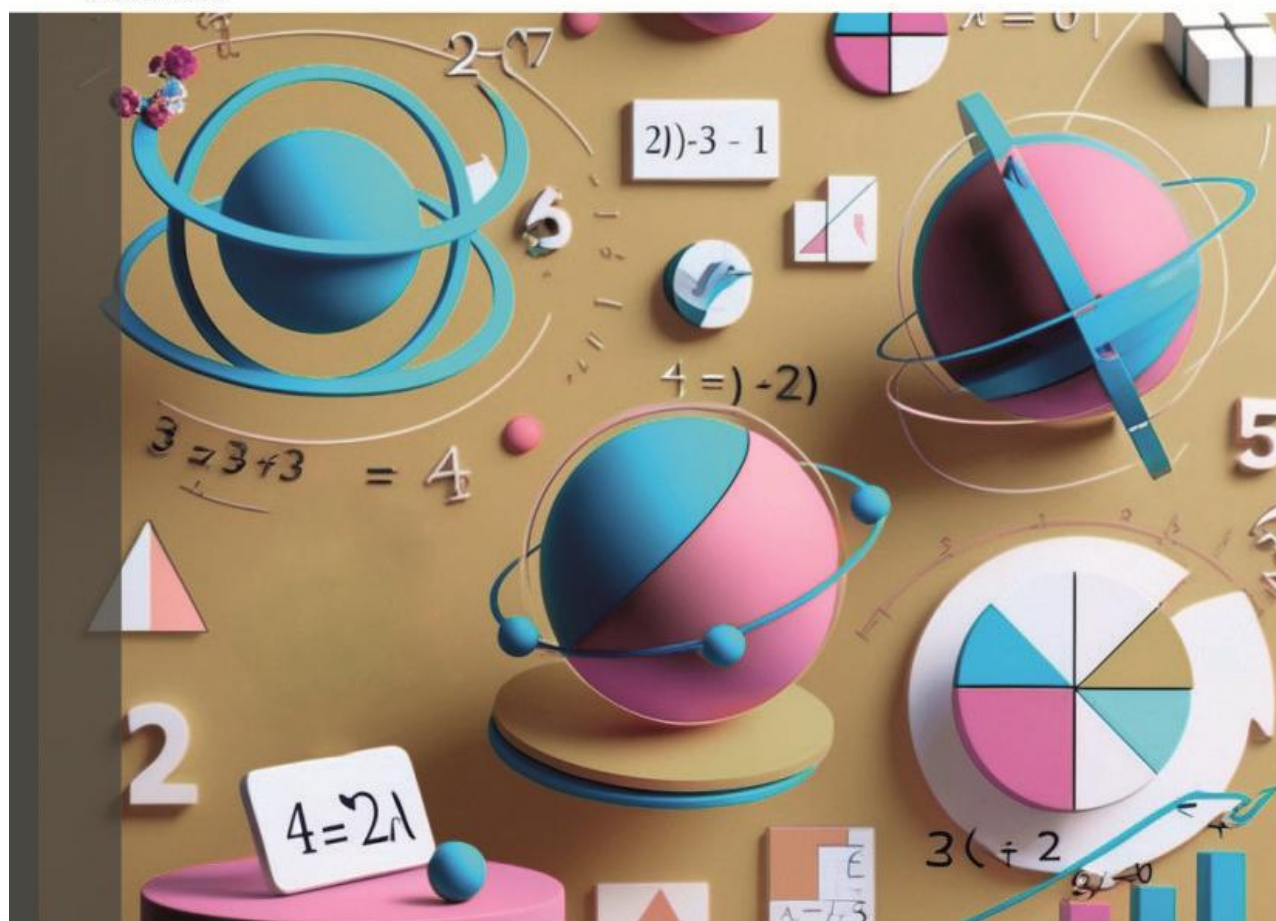


El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática: propuestas para su perfeccionamiento

EdUNICA
Editorial



Colectivo de Autores

Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez

***El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática:
propuestas para su perfeccionamiento***

Autores:

Dr. C. Ibrahim Arnaiz Barrios

Dr. C. Odalis Ledo Miralles

M. Sc. José Antonio García Rodríguez

Editorial Universitaria Ciego de Ávila

EdUNICA

Colaboradores:

Dr. C. Raidy Teidy Rojas Angel Bello

M. Sc. Osleydys Rivera García

M. Sc. Flora Orly Espinosa Jiménez

M. Sc. Carmen Rosa Alvarado Romero

Lic. Angélica María Peña Álvarez

El Instituto Cubano del Libro (ICL) en calidad de Agencia de ISBN, declara que bajo el siguiente número de ISBN quedará registrado el siguiente título, identificando como editor responsable a: Sello Editorial EDUNICA.

Título: ***El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática:
propuestas para su perfeccionamiento***

ISBN: 978-959-85024-4-8

EdUNICA, 2026

Edición y diagramación: Daneisy del Castillo Gómez

Diseño de cubierta: Felipe A. Alfonso Pomares



Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez
Sede Manuel Ascunce Domenech
Editorial Universitaria Ciego de Ávila
Carretera a Ceballos, km 2 $\frac{1}{2}$, Ciego de Ávila, Cuba

Índice

PRÓLOGO.....	1
RESUMEN.....	3
I. EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. SUS COMPONENTES.....	4
II. LA EJERCITACIÓN EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA	21
III. LA INTEGRACIÓN SISTEMÁTICA DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS	30
IV. LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS GENERALIZADAS.....	42
V. LA INTERDISCIPLINARIEDAD EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.....	66
VI. LA SELECCIÓN DE MÉTODOS SEGÚN LA TIPOLOGÍA DE LAS CLASES Y LAS SITUACIONES TÍPICAS DE MATEMÁTICA MEDIANTE ESTILOS DE COMUNICACIÓN ADECUADOS	84
VII. LA ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA	111
VIII. LA UTILIZACIÓN DE RECURSOS INFOTECNOLÓGICOS.....	136
IX. LA EVALUACIÓN DESDE UNA CONCEPCIÓN INTEGRADORA	175
BIBLIOGRAFÍA.....	
SOBRE LOS AUTORES.....	

PRÓLOGO

El libro “El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática: propuestas para su perfeccionamiento” constituye un resultado científico derivado del trabajo sistemático del colectivo de profesores-investigadores del Departamento de Matemática de la Universidad de Ciego de Ávila. Su génesis se asienta en proyectos de investigación educativos desarrollados en el contexto de la formación inicial y permanente de profesores de matemática, en estrecho vínculo con la práctica educativa de la provincia y del país. Cada propuesta ha sido sometida a procesos de validación empírica, ajustada a las condiciones concretas del sistema educativo cubano y socializada en eventos científicos y publicaciones especializadas.

Este libro constituye una herramienta de trabajo imprescindible para investigadores, profesores en formación, docentes en ejercicio e investigadores que buscan fundamentos científicos y orientaciones prácticas para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. El colectivo de autores de la Universidad de Ciego de Ávila ofrece, con esta obra, una contribución tangible al desarrollo de la Didáctica de la Matemática en Cuba y en el contexto iberoamericano.

Invitamos al lector a recorrer estas páginas con la seguridad de que encontrará propuestas útiles, fundamentadas y, sobre todo, posibles de aplicar. Que las propuestas sobre los componentes del PEAM, la ejercitación, la integración de contenidos, las habilidades generalizadas, la interdisciplinariedad, los métodos y estilos de comunicación, la atención a las diferencias individuales, los recursos infotecnológicos y la evaluación integradora sean un catalizador para seguir transformando la enseñanza de la matemática. Al abrir sus páginas, el lector se adentrará en un diálogo fecundo entre la teoría y la práctica, entre las exigencias de la matemática como disciplina y las necesidades de los estudiantes para apropiarse de ella con sentido.

La lectura de este texto no solo confirmará la importancia de la investigación educativa como fuente de cambio, sino que dejará constancia del valioso aporte de la Universidad de Ciego de Ávila al pensamiento didáctico contemporáneo. El camino hacia el perfeccionamiento es largo, pero libros como este nos recuerdan que vale la pena transitarlo con rigor y esperanza. Que estas páginas sean el impulso que muchos educadores estaban esperando. Convencidos que no solo se enriquecerán su saber didáctico, sino que se sentirán parte de un movimiento necesario: el de hacer de la matemática una experiencia de comprensión, disfrute y libertad.

Dr. C. Raidy Teidy Rojas Angel Bello (PT). Vicerrectora Docente de la Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.

RESUMEN

Los resultados de aprendizaje de los estudiantes de la Matemática en las educaciones Secundaria Básica y Preuniversitario requieren del perfeccionamiento continuo del proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática (PEAM), en particular en la provincia Ciego de Ávila de Cuba, se ha constatado en estos niveles educativos, limitaciones en la aplicación integrada del contenido estudiado a la solución de variados ejercicios y problemas. En la presente obra se presentan propuestas desde la concepción del PEAM para potenciar la integración sistemática de los contenidos matemáticos de manera intencionada. Los criterios de los autores se fundamentan a partir del estudio de la literatura sobre Didáctica de la Matemática, la observación de la práctica y la sistematización de los resultados científicos de cuatro tesis de doctorado y más de un centenar de tesis de maestría realizadas en Ciego de Ávila en la etapa 2003–2023, que tienen por objeto de estudio el PEAM. Estos resultados han sido divulgados en revistas y en eventos científicos y han sido utilizados como bibliografía en el proceso de formación inicial y permanente de los docentes de esta especialidad en el territorio avileño desde el curso 2003–2004 hasta el curso 2023-2024. Las propuestas que se presentan contribuyen al perfeccionamiento, actualización y ampliación de la bibliografía sobre Didáctica de la Matemática existente en Cuba y en particular al libro "Temas de Didáctica de la Matemática" la novedad consiste en que sistematiza e integra en un solo cuerpo teórico diversos resultados científicos alcanzados por los autores en su trabajo investigativo y científico metodológico durante la etapa 2003–2023 y se ofrecen fundamentos, sugerencias metodológicas y se ilustra con ejemplos, que pueden ser utilizados tanto en la formación inicial como en la superación y el trabajo metodológico en función de elevar la preparación de los docentes para un desempeño más eficiente.

I. EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. SUS COMPONENTES

Para fundamentar el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática se asume la siguiente definición que contiene todos los componentes, tanto personales como personalizados y permite comprender que este es un proceso organizado que transcurre en las asignaturas para la apropiación del contenido de las ciencias, como parte del proceso educativo, por lo que se adecua al objeto de estudio de los resultados científicos que se proponen. Se asume que:

El proceso de enseñanza-aprendizaje es el proceso educativo institucional que de modo más sistémico organiza y estructura la enseñanza en relación con la manera que debe ocurrir el aprendizaje, a partir de la relación esencial que se da entre los fines de la educación (objetivos) y la precisión de los contenidos y de éstos con la dinámica (maestro, estudiante, métodos, medios, formas, evaluación) a través de los cuales es posible lograr la educación vinculada de manera directa a un determinado contenido de las ciencias concretas, expresado en planes y programas de estudio (Pla, et al., 2010, p. 17).

Cuando la ciencia concreta es la Matemática, entonces se está en presencia del proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática (PEAM).

La Didáctica de la Matemática es la ciencia que estudia el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática como sistema. Su tarea fundamental es estructurar científicamente, a partir del encargo social, los distintos componentes de este proceso, de manera que los profesionales responsabilizados con su dirección, dispongan de fundamentos teóricos y prácticos, cada vez más actualizados y enriquecidos, para el cumplimiento más eficiente de sus funciones.

El PEAM tiene su fundamentación didáctica en las concepciones del proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) desarrollador que se asume en las instituciones cubanas, teniendo en cuenta sus componentes personales (estudiante, profesor y

grupo) y personalizados (objetivo, contenido, métodos, medios, formas organizativas y evaluación) y se reconoce como punto de partida para llevar a cabo el PEA, el diagnóstico integral del estudiante, en el que se deben tener en cuenta los aspectos cognitivos, actitudinales y comunicativos.

Este conocimiento integral de los estudiantes le permitirá determinar al profesor los conocimientos, habilidades, necesidades, motivaciones de sus estudiantes y diseñar su labor concibiendo acciones que propicien estimular las potencialidades individuales de estos, atendiendo adecuadamente sus diferencias mediante estrategias educativas.

La contradicción fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, motor impulsor de su desarrollo, se manifiesta entre los objetivos de la enseñanza de la Matemática y el nivel real de desarrollo alcanzado por los estudiantes en su aprendizaje.

El estudiante es un componente personal del PEAM, que asume la condición de sujeto del mismo en la medida que es consciente y protagonista de su aprendizaje. El profesor es un componente de este proceso, que asume la condición de sujeto en la medida que posee la preparación profesional para diseñarlo, orientarlo, controlarlo, evaluarlo y perfeccionarlo. El grupo es un componente personal del PEAM en el que se establecen interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los estudiantes, de gran importancia para potenciar la actividad conjunta a partir y para el desarrollo de intereses y metas comunes.

El objetivo es elemento orientador del proceso y responde a la pregunta ¿Para qué enseñar? Representa la modelación subjetiva del resultado esperado y está condicionado por las exigencias sociales de una determinada época. Debe ser declarado con alto grado de científicidad y contener los elementos siguientes: habilidad a lograr en los estudiantes, conocimientos asociados,

condiciones en que se produce la apropiación del contenido, nivel de asimilación y profundidad (ICCP, 1987, p. 21).

El objetivo es por tanto la categoría del proceso que tiene el carácter más subjetivo. No obstante, en el proceso se da la dialéctica entre lo subjetivo y lo objetivo, ya que una vez determinado el objetivo por el profesor, le sucede la realización de tareas planteadas al estudiante y entonces el objetivo del profesor "se convierte en acción objetiva, en actividad estudiantil, lo subjetivo adquiere un carácter objetivo, ahora en actividad, en aprendizaje" (Álvarez de Zayas, 1988, p. 29).

Los objetivos de la enseñanza de la Matemática constituyen un pronóstico de las metas, propósitos y aspiraciones a lograr en la educación de la personalidad de los estudiantes a partir de las demandas sociales. Ellos concretan, en un lenguaje pedagógico, el encargo de la sociedad en cuanto a la formación matemática de las futuras generaciones.

De las categorías del PEAM el objetivo es la principal (rectora) en el sentido que determina las restantes: contenido, métodos, medios, formas de enseñanza y evaluación del aprendizaje, pero por el carácter de sistema del proceso, todas estas a su vez se interrelacionan mutuamente e influyen sobre el objetivo.

Siempre la calidad del pronóstico del aprendizaje a partir de las características de los estudiantes dependerá de la preparación científico-pedagógica y la creatividad del profesor. De lo que se trata es de revelar esta relación para que sirva de apoyo a la actuación consciente del docente al diseñar el PEAM.

Sobre la formulación de los objetivos Álvarez de Zayas (1988) expresa: "Además de la habilidad, que constituye el núcleo en la elaboración del objetivo, y del conocimiento que precisa el objeto de trabajo, es necesario determinar los niveles de asimilación, profundidad y sistematicidad de dichos contenidos" (p. 36) y seguidamente dice "obsérvese que se requiere precisar el objetivo y de lo que hablamos es del contenido, la cuestión radica en que el objetivo instructivo es el

contenido precisado en sus aspectos esenciales. El contenido se manifiesta, el objetivo es esencial" (p. 36).

Los elementos a tener en cuenta para la formulación de un objetivo expresados por Álvarez de Zayas (1988), son necesarios, pero no suficientes para la dirección del PEAM a nivel micro curricular, pues no se consideran (por lo menos explícitamente) las características personalógicas del estudiante (su nivel previo de desarrollo), lo cual constituye una fuente para la determinación de los objetivos. En este trabajo se defiende que, además de los elementos señalados para la formulación de un objetivo se debe pronosticar la intencionalidad educativa del contenido, así como diferentes niveles de profundidad en cuanto a la aplicación integrada del contenido, en dependencia del estadio de desarrollo en que se encuentran los estudiantes como tendencia, según el diagnóstico.

Desde de lo expresado anteriormente para la formulación del objetivo y que este posibilite el pronóstico del desarrollo potencial de los estudiantes a partir del diagnóstico de estos, los docentes deben:

- Determinar diferentes niveles de profundidad en cuanto a la aplicación integrada del contenido en dependencia del estadio de desarrollo en que se encuentran los estudiantes como tendencia y teniendo en cuenta el proceso de derivación de los objetivos.
- Formular el objetivo teniendo en cuenta los elementos principales que estos deben contener:
 - Habilidad (procedimiento generalizador o del pensamiento lógico) (núcleo del objetivo).
 - Conocimiento (precisa el objeto de trabajo).
 - Nivel de profundidad del contenido a partir de diferentes exigencias en cuanto a la aplicación integrada del mismo.
 - Nivel de asimilación y de sistematicidad del contenido.
 - Intencionalidad educativa del contenido.

Después de formulado el objetivo para una unidad, unidad temática o un sistema de clases, la dosificación del contenido debe hacerse de manera que en las clases se posibilite el tratamiento del nuevo contenido teórico y se planifique tiempo suficiente para ejercitar su aplicación de forma gradual

En el libro Metodología de la enseñanza de la Matemática I (Ballester, et al., 1992) como bibliografía básica de Didáctica de la Matemática en Cuba, el concepto de materia o contenido de enseñanza de la Matemática incluye los siguientes elementos:

- Conceptos (expresados en forma de caracterizaciones o definiciones) y proposiciones (teoremas especialmente) como partes integrantes de diferentes teorías de la ciencia Matemática.
- Métodos y procedimientos que representan lo esencial de los métodos de la Matemática (cálculos, procedimientos heurísticos y algorítmicos con sus símbolos y signos correspondientes, acompañados de sus técnicas de trabajo mental y práctico).
- Ideas filosóficas, políticas, morales, conclusiones ideológicas fundamentales, relacionadas con la ciencia Matemática o que resultan directamente de ella (p. 46).

Por lo cual, el contenido es un componente personalizado del PEAM en el que se expresan los conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos), habilidades, hábitos, capacidades, experiencia transformadora (investigativa), valores, convicciones y normas de conductas; que al ser asimiladas por los estudiantes, en el aprendizaje, posibilitan el cumplimiento de los objetivos planteados. Responde a la pregunta ¿qué enseñamos?

El cumplimiento de los objetivos se realiza a través del dominio del contenido de la enseñanza de la Matemática. El contenido se subordina a los objetivos, pero estos

se manifiestan, se concretan con ayuda del contenido. Esta relación dialéctica entre el contenido (como fenómeno) y el objetivo (como esencia) tiene un significativo valor metodológico para la dirección del PEAM.

El contenido de enseñanza de la Matemática en Cuba está ordenado en líneas directrices, atendiendo a las tres áreas de la Matemática (Aritmética, Álgebra y Geometría). Por considerar como eje central de las propuestas la integración sistemática de los contenidos, se le dedicará un epígrafe, al igual que a las habilidades matemáticas generalizadas.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se desarrolla a partir de la utilización de variados métodos y medios de enseñanza. Los métodos se pueden definir "como el modo de realizar las acciones el profesor y los estudiantes para alcanzar los objetivos" (Álvarez de Zayas, 1988, p. 13).

Se asume que el método es el componente personalizado del PEAM que expresa la secuencia de acciones del profesor y de los estudiantes, dirigidas a lograr los objetivos de la enseñanza. Responde a la pregunta ¿cómo enseñar?

La demanda de seleccionar métodos que impliquen al estudiante en su desarrollo y aprendizaje, aparentemente nueva, ha sido planteada a lo largo de la historia de la pedagogía cubana por ilustres educadores:

"Nosotros somos los irreflexivos cuando atribuimos a la incapacidad de los niños lo que es un efecto de nuestro método y lenguaje" (Varela, 1817a, p. 120).

"Mientras más hablen menos enseñarán; y que por lo tanto un maestro debe hablar muy poco, pero muy bien" (Varela, 1817b, p.171).

José de la Luz y Caballero reflexionaba: "No debe aprenderse de memoria únicamente; es necesario comprender para saber; adquirir conocimiento, no retener palabras: hay que aprender pensando" (MINED, 1986, p. 6).

"Es necesario sustituir el espíritu literario de la educación por el espíritu científico" (Martí, 1975, p. 289).

También, Martí proyectaba:

Las escuelas debían ser casas de razón donde con guía juiciosa se habituase al niño a desenvolver su propio pensamiento, y se le pusiera delante, en relación ordenada, los objetos e ideas, para que deduzca así las lecciones directas y armónicas que le dejen enriquecido con sus datos, además que fortificado con el ejercicio y gusto de haberlos descubiertos (MINED, 1986, p. 6).

Varona aseveró: “Enseñar a trabajar es la tarea del maestro. A trabajar con las manos, con los oídos, con los ojos y después, y sobre todo, con la inteligencia” (MINED, 1986, p. 6).

En el legado del Comandante de la Revolución sobre la educación, en particular referido a los métodos, se encuentra como afirmación: “Solo se puede despertar el interés de los estudiantes por un aspecto del conocimiento, demostrándoles su importancia, motivándolos legítimamente a investigar” (Castro, 1981, p.8).

Los métodos para que los estudiantes alcancen los objetivos mediante la apropiación del contenido deben ser variados y obedecen a diferentes teorías y enfoques existentes para la dirección del PEAM. Su conocimiento por los profesores es de carácter esencial, de manera que su proceder esté avalado por una posición consciente y responsable a partir del desarrollo teórico de la Pedagogía y la Didáctica de la Matemática (Torres, 2000).

Según este propio autor (Torres, 2000) en la década de 1980, como tendencia, en Cuba se manifestaron tres enfoques o posiciones metodológicas en la dirección del PEAM. El primer enfoque, la enseñanza programada, su esencia psicológica se basa en la relación estímulo-reacción-reforzamiento. El segundo enfoque, la enseñanza problémica, que según sus propias palabras “muy difundida pero ciertamente poco entendida, y por tanto desconocida” (Torres, 1992, p. 25), por lo que no ha sido utilizada suficientemente en la dirección del proceso por parte de los profesores de Matemática.

El tercer enfoque, el método de Kolliakin o de sistemas de ejercicios que está basado “en una de las posiciones fundamentales de Davydov (1978) que plantea que el contenido y los métodos de enseñanza proyectan un tipo correspondiente de pensamiento” (Muñoz, 1985, p. 44).

En el empleo de métodos en el PEAM en Cuba, de igual forma influyeron los modelos que más han impactado en la enseñanza de las ciencias en América Latina y el Caribe, según (Macedo, 2001) son:

- El expositivo de transmisión verbal o enseñanza tradicionalista, cuyos rasgos fundamentales son: La ciencia se concibe como un conjunto de verdades definitivas, el profesor como actor principal, experimentos para comprobar o motivar, aprendizaje basado en la repetición y la memoria, ciencia para pocos, programas enciclopédicos.
- El de aprendizaje por descubrimiento, el cual se caracteriza por la observación de los fenómenos como punto de partida, aprendizaje basado en habilidades y procedimientos, la experimentación, la desvalorización del contenido, el estudiante como protagonista autónomo, el profesor casi no dirige.
- El de aprendizaje por cambios conceptuales. Se distingue por los siguientes rasgos: aprender ciencia significa sustituir ideas previas de sentido común por otras más acorde con las ideas científicas, debe producirse insatisfacción con lo que se sabe, lo que hay en el cerebro del estudiante tiene importancia; los estudiantes tienen conceptos que pueden ser útiles o no, lo importante es que evolucionen, encontrar sentido supone establecer relaciones, quien aprende construye activamente significados, los estudiantes son responsables de su aprendizaje, hay que convertirlo en actor y protagonista de éste.

Este último se refiere al concepto de enseñanza como investigación (Ramos, 2001), la construcción del conocimiento no es autónoma, hay que facilitarla, hay que dirigirla (docente, familia, contexto).

Se comparte el criterio de (Torres, 1992) de que ningún método debe ser adoptado como absoluto cuando expresó “Somos del criterio que de una combinación oportuna y adecuada de diferentes métodos de enseñanza resulta el aprendizaje más efectivo (p. 29).

En correspondencia con las aspiraciones planteadas en los objetivos, las características del contenido, de los métodos y procedimientos, se seleccionan los medios de enseñanza. Estos son apoyo didáctico o el soporte material de los métodos, es decir, aquellos recursos materiales que facilitan las actividades del profesor y los estudiantes para alcanzar los objetivos. Responden a la pregunta ¿Con qué enseñar?

Los medios de enseñanza más utilizados en el PEAM son: la pizarra, la voz del profesor, tarjetas, hojas de trabajo, guías de estudio, láminas, libros de textos, cuadernos complementarios, objetos que simulen figuras o cuerpos geométricos; así como modelos representativos de estos e instrumentos de trazado y otros medios de información escritos como: revistas, la prensa, fuentes orales, donde se puedan recopilar datos para la formulación y resolución de problemas.

La televisión y los videos como medios de enseñanza, son efectivos para elevar la calidad de este proceso. Otros recursos tecnológicos a emplear en el PEAM son los software educativos y los teléfonos móviles; es inevitable precisar que los medios audiovisuales, las tecnologías de información y comunicación no pueden sustituir el papel orientador y dirigente del profesor en el proceso, ni su labor educativa en la transmisión y formación de sentimientos, valores y convicciones en ese momento de comunicación con sus estudiantes; sin embargo dichos medios al utilizarse correctamente permiten la independencia, la selectividad e interacción en el trabajo del estudiante, la autorregulación; además contribuyen al desarrollo de la motivación, de la voluntad, de constancia, autoconfianza, de la capacidad de elección, de decisión, de la memoria, imaginación y creatividad y el profesor los

puede utilizar para atender las diferencias individuales de sus estudiantes y para lograr el protagonismo de estos.

Desde de lo planteado anteriormente se reflexiona que relacionado con los métodos y medios en el PEAM, los docentes deben tener en cuenta los requerimientos metodológicos siguientes:

- Seleccionar métodos y procedimientos que impliquen a los estudiantes en su aprendizaje, a partir del dominio de teorías, enfoques y tendencias existentes para la dirección del aprendizaje de la Matemática.
- Concebir el establecimiento de una relación afectiva del estudiante con el contenido de enseñanza mediante un adecuado estilo de comunicación que propicie una correcta motivación y orientación hacia el objetivo de la actividad, a partir de un estrecho vínculo del contenido de enseñanza con la vida.
- Ofrecer tratamiento a los conceptos, teoremas matemáticos y procedimientos de solución con una activa participación de los estudiantes en la búsqueda y fijación del conocimiento.
- Planificar la realización de acciones dirigidas a desarrollar el pensamiento heurístico de los estudiantes para que aprendan a resolver problemas, potenciando la utilización de los procedimientos heurísticos (principios, reglas y estrategias) como una importante vía para lograrlo.
- Concebir la atención a las diferencias individuales del estudiante, en el tránsito del nivel logrado (actual) al que se aspira (potencial) haciendo uso de los bloques de ejercicios para el desarrollo de la actividad intelectual independiente de los estudiantes y su conjugación con la colectiva.
- Garantizar una correcta base orientadora para la acción (BOA) y planificar la formación de las acciones mentales por etapas, aprovechando el trabajo con esquemas lógicos.
- Concebir el uso de variados medios de enseñanza donde se incluyan la computación, el video, la televisión y los teléfonos inteligentes.

En cuanto a la selección de métodos y medios se asume, que se debe tener en cuenta el diagnóstico de los estudiantes, los objetivos a lograr de acuerdo al contenido, su relación con las formas de organización, que posibiliten la independencia y el aprendizaje colectivo, las valoraciones críticas de su trabajo y del de sus compañeros, además del desarrollo de los procesos afectivos y comunicativos con un estilo de comunicación adecuado. Más adelante en los epígrafes correspondientes a la selección de métodos según la tipología de las clases y las situaciones típicas de la Matemática mediante estilos de comunicación adecuados y el relacionado con la utilización de recursos infotecnológicos el lector podrá encontrar aspectos más concretos sobre estos aspectos.

La forma organizativa es el componente personalizado del PEAM relacionado con la manera en que se organiza el mismo en el tiempo y en el espacio, en correspondencia con el contenido a asimilar y el objetivo a alcanzar; así mismo, establece una determinada relación espacio-tiempo entre los estudiantes y el profesor y entre los propios estudiantes.

La forma organizativa, basada en determinado sistema adecuado de relaciones estructurales y funcionales, es la que garantiza el funcionamiento de los demás componentes del PEA como un sistema. Existe consenso entre los pedagogos de que la forma básica de organización es la clase, en la cual se cumplen las funciones didácticas de aseguramiento del nivel de partida, orientación hacia el objetivo, motivación, tratamiento de la nueva materia, fijación o consolidación de lo aprendido y evaluación; estas funciones se corresponden con los tres momentos de la clase de orientación, ejecución y evaluación.

Ballester, et al., (1992), consideran las formas de organización de la enseñanza como métodos y en estas incluye, el método de enseñanza frontal, método de trabajo diferenciado y método de excursiones, conjuntamente asumen las formas de organización de la enseñanza identificadas por Jungk (1981): la clase, trabajo productivo, excursiones, enseñanza facultativa y círculos de interés y para la clase

las diferencian en las formas (enseñanza frontal, trabajo individual y trabajo colectivo).

En la asignatura Matemática en la Educación General los tipos de clases más utilizados son las clases de introducción al nuevo contenido y las de consolidación en sus formas de ejercitación, repaso, sistematización y profundización; asimismo se utilizan como formas de organizar el proceso las actividades extradocentes (círculos de interés, murales, buzones, concursos y olimpiadas de Matemática), estas dos últimas para la atención a los estudiantes con más nivel de desarrollo (MINED, 2007) y las consultas o planes remediales, tutorías por profesores, apadrinamientos por monitores o estudiantes aventajados, juegos didácticos y técnicas participativas que promuevan el intercambio y la colaboración como formas de atención a los estudiantes con menor nivel de desarrollo, para favorecer sus potencialidades, erradicar sus insuficiencias y contribuir a elevar los resultados del PEAM.

Para ser consecuente con los fundamentos y propuestas para el perfeccionamiento del PEAM se requiere de impartir clases desarrolladoras, a partir de que se coincide con Ramos (2001) que define "clase desarrolladora" como:

Aquella que propicia la apropiación por el estudiante de la parte de la experiencia histórico-social (cultura) que responde al encargo social. De forma que, partiendo de su nivel de desarrollo real, el estudiante participe activa, creadora y afectivamente, bajo la dirección del profesor y en interacción y comunicación con los otros estudiantes, para asimilar los conocimientos, habilidades, modos de actuación, valores y sentimientos; que expresan el nivel de desarrollo potencial pronosticado (zona de desarrollo próximo) (p.11).

Por lo cual, los requisitos planteados por este autor para que la clase sea desarrolladora son:

- Poseer una caracterización académica, psicopedagógica y política del estudiante insertado en el conjunto de sus relaciones.
- Atención a las diferencias individuales del estudiante, en el tránsito del nivel logrado (actual) al que se aspira (potencial).
- Desarrollar la actividad intelectual independiente en el estudiante y conjugarla con el aprendizaje colectivo.
- Poner al estudiante en la “posición del científico” como vía para orientar el proceso de aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento.
- Desarrollar los procesos lógicos del conocimiento y las habilidades que se forman sobre la base de su sistematización.
- Establecer una relación afectiva del estudiante con el contenido de enseñanza.
- Lograr el vínculo del contenido de aprendizaje con la práctica social y su valoración por el estudiante en el plano educativo. (Ramos, 2001, p. 11).

La evaluación ofrece información desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo sobre la generalidad y la individualidad de los estudiantes, acerca del cumplimiento de los objetivos y de la efectividad del proceso en su totalidad con el propósito de perfeccionarlo oportunamente. Constituye la vía esencial para lograr una retroalimentación efectiva y oportuna del proceso con el propósito de evitar fracasos irreversibles al final del curso.

La evaluación es uno de los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje revela el estado de los procesos de desarrollo cognitivo, valorativo y

comunicativo del estudiante en relación con los objetivos a lograr, que se expresa a través de un juicio. Se desarrolla como un proceso sistemático interno a través de todas las estructuras: tarea, clase, unidad, asignatura (Pla, et al., 2012, p. 14).

La evaluación del aprendizaje de los estudiantes es de gran importancia pues mediante ella se comparan los resultados del trabajo de educadores y educandos con los objetivos propuestos, lo cual permite determinar la eficiencia del proceso y consecuentemente reorientar el trabajo sobre los objetivos o sobre parte de ellos, con todos o con algunos estudiantes, al mismo tiempo que se comprueba si los métodos empleados fueron efectivos o no. El incremento del papel de la evaluación del aprendizaje de los estudiantes como vía de retroalimentación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática constituye una necesidad del perfeccionamiento de dicho proceso.

Para que la evaluación del aprendizaje sea efectiva debe cumplir las funciones: instructiva, educativa, de diagnóstico, desarrolladora y de control, las cuales en la práctica interactúan formando una unidad dialéctica, su separación sólo responde a un interés metodológico. La función instructiva tiene el propósito de aumentar el volumen y calidad de los conocimientos y la formación de hábitos y habilidades de manera que se desarrollen las habilidades cognoscitivas en los estudiantes y el nivel de estudio se incremente y perfeccione.

La función educativa está dada en que en todos los instrumentos de evaluación y en su aplicación se debe contribuir a la formación de orientaciones valorativas, actitudes, convicciones ideológicas y normas de conducta en los estudiantes.

La observación continua, sistemática y diaria de los estudiantes en el desempeño de las tareas docentes, permite cumplir con la función diagnóstica de la evaluación de forma sistemática para analizar el avance o no y diseñar acciones para el trabajo diferenciado, lo que permitirá también el control junto a otras formas de evaluación a emplear como son las escritas; además de estas evaluaciones

sistemáticas en la asignatura están establecidos los tipos de evaluación parcial y final.

También tiene una función desarrolladora ya que, en el proceso evaluativo deben incluirse ejercicios y tareas que comprueben y al propio tiempo contribuyan a desarrollar en los estudiantes el pensamiento independiente, racional y reflexivo, la creación, la tenacidad, la perseverancia y la capacidad para aplicar de manera integrada el contenido estudiado.

La esencia de la función de control en el proceso de evaluación del aprendizaje radica en la necesidad de ayuda a los estudiantes. El proceso de control permite establecer una constante comparación de lo planificado con su cumplimiento mediante el análisis de los resultados de aprendizaje y así adecuar las estrategias didácticas utilizadas. Esta función alcanza un nivel más alto en la medida que el estudiante participa de manera activa en el control de su aprendizaje y el de sus compañeros, mediante la autoevaluación y la coevaluación respectivamente.

Dentro de los errores que se cometen en la evaluación del aprendizaje está, no concebir todas las funciones de la evaluación que permitan una concepción integradora de la evaluación, no obstante, en la literatura se observa la tendencia hacia un modelo de evaluación integrador, el cual proyecta que la misma sea: procesal, holística, contextualizada, democrática, formativa -al servicio de valores - y cualitativa (Álvarez de Zayas, 1999; Portela, 2001 y Pla, 2003).

La evaluación debe ser integradora, desarrolladora, contextualizada, democrática, formativa -al servicio de valores-, cuantitativa y cualitativa y debe constituir la base para el perfeccionamiento continuo del PEA (Pla, et al., 2012). Más adelante en el epígrafe correspondiente a la evaluación desde una concepción integradora el lector encontrará sugerencias metodológicas para el proceso de evaluación del aprendizaje.

Se determinaron desde el curso 2004-2005 nueve lineamientos o ideas claves para el trabajo metodológico de la asignatura (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014), los que se tienen en cuenta en esta obra, en la que se considera necesario diagnosticar integralmente a los estudiantes, sobre los conocimientos que poseen,

el nivel de desarrollo de las habilidades, sus necesidades y motivaciones con respecto a la asignatura y a su formación integral para atender sus diferencias individuales; mediante el trabajo independiente de forma sistemática, diferenciada y variada, la sistematización de contenidos, la utilización de formas organizativas donde se combine el trabajo individual, el grupal cooperado y variados medios que incluyan las técnicas de la información y las comunicaciones, el adecuado clima afectivo donde haya análisis, reflexión, para que los estudiantes lleguen a encontrar las vías de solución, reconociendo sus errores y que en la evaluación se promueva el debate de estas vías, mediante la crítica y la autocrítica, para elevar la calidad del aprendizaje.

En la dirección del PEAM reviste de particular interés la insatisfacción e inconformidad con los resultados que puedan tener los estudiantes, la familia y la dirección de la institución educativa correspondiente, así como organismos y organizaciones políticas y del estado con respecto al aprendizaje de la Matemática. El análisis de los resultados del aprendizaje ha revelado una contradicción entre los resultados que muchos estudiantes alcanzan en los diferentes grados y niveles, generalmente superiores a los 90 puntos y los que obtienen en exámenes de ingreso a la universidad y en los estudios universitarios en los cuales manifiestan limitaciones en la aplicación integrada del contenido.

Los fundamentos anteriores, dichos lineamientos y las limitaciones de los estudiantes para la aplicación integrada de los contenidos demandaron de investigaciones, en particular cuatro tesis de doctorado y más de un centenar de tesis de maestría realizadas en Ciego de Ávila, que tuvieron por objeto de estudio el PEAM, algunas con anterioridad desde 2003 y otras más actuales, a partir del 2020 y hasta 2023, las que identificaron problemas del PEAM que constituyen regularidades para la aplicación integrada del contenido.

Teniendo en cuenta los fundamentos pedagógicos, didácticos, epistemológicos, psicológicos y sociológicos del PEAM expuestos y las investigaciones realizadas, se han determinado las siguientes dimensiones de la dirección del PEAM para lograr la aplicación integrada del contenido:

- El diagnóstico integral de los estudiantes.
- El pronóstico del desarrollo potencial de los estudiantes en la determinación y formulación del objetivo para el desarrollo de las habilidades matemáticas generalizadas y de los procesos afectivos y comunicativos.
- La dosificación y la selección del contenido de enseñanza para su integración sistemática a través de la interdisciplinariedad y la ejercitación como vía para la fijación del mismo.
- La selección de métodos, de medios y formas organizativas que impliquen al estudiante en su aprendizaje y que atiendan las diferencias individuales mediante estilos de comunicación adecuados en el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática.
- La evaluación del aprendizaje como vía de retroalimentación del proceso y con una concepción que estimule la aplicación integrada del contenido.

En los siguientes epígrafes se expondrán fundamentos sobre dichas dimensiones y se harán propuestas metodológicas para la práctica pedagógica dirigidas al perfeccionamiento del PEAM mediante la integración sistemática del contenido que propicie la elevación de la calidad del aprendizaje de la Matemática.

II. LA EJERCITACIÓN EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Se concuerda con Romero (2013) que define “la ejercitación, como la práctica y resolución constante de los ejercicios de Matemática, que asigna el docente, para realizarlas dentro y fuera del salón de clases, con el fin de fijar y retener el aprendizaje” (p. 3).

En el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática, la ejercitación juega un rol de gran importancia en el desarrollo de habilidades y hábitos. El proceso de desarrollo de habilidades es un proceso generalizado, que se fundamenta en la teoría de la formación de las acciones por etapas de Galperin (1979).

Por ejemplo, en el desarrollo de la habilidad calcular, los objetos de la acción son los tipos de ejercicios con sus particularidades respecto a tipos de operación, cantidad de términos, grado de dificultad, complejidad, entre otras. El resultado de la acción, es una acción mental generalizada y automatizada, donde la base de orientación se convierte en saber, el desarrollo de la acción se convierte en poder (habilidades y hábitos) y el dominio de la acción se expresa a través de la facilidad de calcular, de esta forma la acción elaborada se incluye en un sistema de acciones. La realización didáctica de esta fase de la formación y control de la acción trata de la estructuración del proceso de ejercitación, con el objetivo de la formación y el perfeccionamiento de la acción hasta su automatización (Ballester, et al., 1992).

La ejercitación cumple con las funciones: instructiva, educativa, desarrolladora y de control.

La función instructiva está dirigida a la formación en el estudiante del sistema de conocimientos, capacidades, habilidades y hábitos matemáticos que se corresponden con su etapa de desarrollo. A través de la ejercitación deben ser fijados conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos (Ballester, et al., 1992).

La función desarrolladora está encaminada a fomentar el pensamiento de los estudiantes (en particular, la formación en ellos del pensamiento científico y

teórico) y a dotarlos de métodos efectivos de actividad intelectual. Otro aspecto a tener en cuenta es su contribución a la formación y desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, lo cual se realiza cuando estos analizan distintas vías de solución de un ejercicio, uno u otro método de solución, aprenden a extraer y a utilizar la información contenida en él, son capaces de construir ejercicios sobre la base de uno dado (Ballester, et al., 1992).

La función educativa está orientada a la formación de la concepción científica del mundo y a potenciar los valores en los estudiantes (Ballester, et al., 1992).

La función de control se orienta a determinar el nivel de cumplimiento de las tres funciones anteriores, o sea; la instrucción, desarrollo y educación de los estudiantes, su capacidad para el trabajo independiente, el grado de desarrollo de su pensamiento matemático; es decir a comprobar en qué medida se cumplen los objetivos de la asignatura (Ballester, et al., 1992).

En el centro de la estructuración metodológica de la ejercitación están los ejercicios matemáticos, que es el medio principal para el cumplimiento de los objetivos de la asignatura (Müller, 1987), estos pueden ser clasificados en los siguientes tipos:

- Ejercicios para el aseguramiento del nivel de partida.
- Ejercicios para la introducción de nuevos conocimientos.
- Ejercicios para la motivación.
- Ejercicios para la fijación (ejercitación, profundización, repaso, sistematización, aplicación).
- Ejercicios para el desarrollo de habilidades y hábitos.
- Ejercicios para desarrollar el pensamiento de los estudiantes.
- Ejercicios para el control y la evaluación.

La mayoría de los ejercicios utilizados en la escuela están destinados al desarrollo de habilidades y hábitos, elemento indispensable para el desarrollo de las capacidades, de aquí que con la ejercitación se hace un aporte importante al

cumplimiento de los objetivos de la Matemática y su estructuración metodológica correcta sea una tarea priorizada para los profesores. Hay dos aspectos que se deben tener en cuenta en la estructuración metodológica de la ejercitación: la selección de los ejercicios o sistemas de ejercicios y la utilización de una metodología específica para la dirección del proceso de ejercitación. Es importante utilizar los ejercicios de forma progresiva, para contenidos de menor dificultad menor cantidad de ejercicios, para contenidos de mayor dificultad, mayor cantidad de ejercicios.

En el texto de Metodología de la Enseñanza de la Matemática I (Ballester, et al., 1992) se hace referencia a algunos aspectos que el profesor debe tener en cuenta para seleccionar o elaborar los ejercicios que se van a plantear a los estudiantes:

- Las habilidades o hábitos fundamentales a desarrollar de acuerdo con los objetivos concretos de la enseñanza, aquí está presente la función instructiva de la ejercitación, que no excluye la función educativa y la de desarrollo.
- La actividad mental que deben desarrollar los estudiantes en el proceso de solución, aquí hay que considerar el contenido de las acciones (objetivo de las acciones, tipos de acciones y condiciones para las acciones en función de las exigencias que el ejercicio plantea a la actividad mental de los estudiantes para su solución). En cuanto a condiciones para las acciones que están dadas por las exigencias que el ejercicio plantea a la actividad mental de los estudiantes para su solución se debe considerar; el grado de dificultad, el grado de complejidad y el grado de actualización.

La graduación de los ejercicios de acuerdo al grado de dificultad debe hacerse de manera que se comience con ejercicios sencillos que garanticen el éxito de todos los estudiantes, el de mayor dificultad debe ser resuelto por algún estudiante de mayor capacidad dentro de los estudiantes promedio, para los estudiantes de mayor capacidad se deben seleccionar ejercicios especiales o adicionales, de esta manera se trabaja de manera diferenciada.

Se puede ejemplificar en el trabajo con ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, diferentes posibilidades de formar complejos de ejercicios:

- Dada la ecuación, inecuación o sistema de ecuaciones y el dominio básico, hallar el conjunto solución.
- Dado el conjunto solución y el dominio básico de una ecuación, hallar la ecuación, inecuación o sistema de ecuaciones.
- Dada la ecuación, inecuación o sistema de ecuaciones, hallar el dominio básico.

La variación en un ejercicio se destaca por el modo de expresión matemático mediante textos, variables, representación geométrica, tablas o esquemas y forma lingüística.

También con la elevación del grado de dificultad está relacionado el nivel o grado de complejidad, se habla entonces de complejidad de las condiciones, de los medios matemáticos o del proceso del pensamiento.

Por ejemplo, en el caso de las construcciones, para realizar un ejercicio:

- Se necesita solo una construcción elemental o se aplica sólo un teorema.
- Se necesitan dos o más construcciones elementales o dos o más medios de construcción (definiciones, teoremas).
- Se realiza sobre la base de un algoritmo de construcción.

Otro elemento es el grado de actualidad el cual depende del momento en que se plantea el ejercicio, el profesor debe estar consciente del nivel de las acciones mentales que exige cada ejercicio el profesor y en sus clases tratar el nuevo contenido para que abarque todas las dificultades, con la complejidad que permita el desarrollo mental de los estudiantes.

Para gradar los ejercicios y problemas según la profundidad del contenido se debe tener en cuenta:

- El nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes

- La integración de los contenidos matemáticos.
- La estructura de la formulación.
- La subdivisión en ejercicios parciales.

Otro elemento importante a considerar en la concepción de un sistema de ejercicios y problemas matemáticos es el trabajo con bloques, compuestos por aquellos que se corresponden con los diferentes niveles de profundidad o exigencias declaradas en el objetivo.

El bloque de ejercicios se plantea íntegramente al colectivo estudiantil y el profesor decide, a partir de la caracterización que posee del grupo, los estudiantes que deben comenzar por el primero, el segundo y quiénes deben realizar sólo los últimos del bloque, los cuales se corresponderían con las exigencias máximas del objetivo en cuestión (Arnaiz, 2003, p 66).

En el diseño de los bloques de ejercicios y en el trabajo con ellos, el profesor debe propiciar que cada estudiante tenga gran probabilidad de resolver los ejercicios asignados con niveles mínimos de ayuda, como premisa para cumplir exigencias superiores, es fundamental un correcto trabajo con la base orientadora de la acción (BOA), la elevación progresiva de las dificultades, con ejercicios o incisos en correspondencia con cada nivel de profundidad del objetivo.

Para gradar los ejercicios y problemas según la profundidad del contenido se debe tener en cuenta:

- El nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes
- La integración de los contenidos matemáticos.
- La estructura de la formulación.
- La subdivisión en ejercicios parciales.

En la dirección del proceso de la clase de ejercitación, el profesor debe dirigir sus actividades hacia:

- Creación de la motivación y orientación hacia el objetivo.
- Reconocimiento por parte de los estudiantes del desarrollo de su poder.
- Uso de la crítica y autocrítica.
- La activación de los estudiantes.
- La utilización efectiva y racional del tiempo.

Los profesores deben conocer formas efectivas de explotar al máximo las potencialidades que la resolución de ejercicios brinda para contribuir al mantenimiento y desarrollo de habilidades y hábitos, al desarrollo del pensamiento y a la educación ideológica de los estudiantes.

La resolución de problemas, como tipo de ejercicio, es una vía fundamental para realizar la enseñanza de la Matemática.

Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos (Ballester, et al., 1992, p.407).

La importancia de los problemas está dada por las funciones instructiva, educativa, desarrolladora y de control que éstos desempeñan en la enseñanza de la Matemática y que se encuentran en estrecha relación con los campos de objetivos de la enseñanza de esta disciplina.

En el proceso de la ejercitación se propone por la autora las siguientes ideas principales:

- Los profesores deben aplicar una concepción metodológica integradora e interdisciplinaria y contextualizada en la dirección de la ejercitación con sus estudiantes para el aprendizaje del contenido de la asignatura.
- Se debe favorecer un ambiente cognitivo-afectivo en todo el proceso de ejercitación mediante métodos, medios, estilo de comunicación y tareas docentes que deben propiciar la atención a las diferencias individuales y su conjugación con el trabajo individual y grupal a partir de las características de los estudiantes.

A partir de los fundamentos teóricos expuestos y de las ideas principales se proponen los siguientes requerimientos metodológicos para la ejercitación:

1. Dosificar el contenido de manera que se conciba tiempo suficiente dentro del sistema que se trate (clase, unidad o tema, asignatura) para ejercitar su aplicación integrada, interdisciplinaria y contextualizada a la solución de ejercicios y problemas como vía para la fijación del mismo.
2. Seleccionar y diseñar los ejercicios teniendo en cuenta:
 - Propiciar, siempre que sea posible, la integración de las tres áreas de la Matemática (Aritmética, Álgebra y Geometría) a través de la interdisciplinariedad.
 - Intercambiar los elementos de un ejercicio: lo dado, la vía de solución y lo buscado.
 - Plantear ejercicios con solución única, sin solución, con varias vías de solución con datos insuficientes o superfluos.
 - Gradación de las dificultades desde ejercicios muy sencillos hasta llegar al nivel deseado, atendiendo a la complejidad y actualidad de acuerdo con el desarrollo correspondiente de los estudiantes.
3. Integrar las habilidades generalizadas y las de estimación, esbozo de figuras y procesamiento de datos, leer y escribir números, comparar y ordenar números, traducir del lenguaje común al algebraico, realizar construcciones elementales,

con las habilidades o procedimientos asociados a las tres formas del pensamiento lógico teniendo en cuenta la sistematización de contenidos precedentes.

4. Seleccionar métodos y medios para la realización de ejercicios y tareas docentes con un estilo de comunicación adecuado en el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática para la atención diferenciada de los estudiantes según sus características, implementando formas de trabajo individuales y grupales.

5. Elevar gradualmente el nivel de complejidad de los ejercicios teniendo en cuenta que se propicie de manera sistemática la aplicación integrada, interdisciplinaria y contextualizada del contenido. Incluir preguntas o incisos de preguntas, que con un mayor grado de complejidad estimulen el estudio individual y colectivo de los estudiantes y se potencie el desarrollo de habilidades matemáticas para participar en concursos y olimpiadas.

6. Orientar a los estudiantes hacia la búsqueda de regularidades o propiedades de una serie de ejercicios, al planteamiento de ejercicios, al reconocimiento de las causas de sus errores, así como de lo logrado, lo que falta por lograr y cómo hacer para lograr lo que falta (reflexiones metacognitivas, autoevaluación y coevaluación).

La ejercitación bien planificada, con ejercicios y problemas teniendo en cuenta el grado de dificultad, el grado de complejidad y el grado de actualización, considerando la cantidad de ejercicios, de acuerdo al diagnóstico de los estudiantes, con la posibilidad de dar diferentes formas de resolverlos de forma individual o colectiva contribuyen de manera efectiva en la fijación del contenido. Los fundamentos teóricos expuestos y los requerimientos metodológicos propuestos para la ejercitación, pueden ser de gran ayuda para que los profesores dirijan el PEA de la Matemática de forma tal que los estudiantes ejerciten mejor los conocimientos para el logro exitoso de los objetivos de la asignatura.

Después de formulado el objetivo para una unidad, unidad temática o un sistema de clases, la dosificación del contenido debe hacerse de manera que en las clases se pueda ir logrando, gradualmente, niveles superiores en la aplicación integrada

del contenido a la solución de ejercicios y problemas, para lo cual es necesario diseñar el tratamiento del contenido teórico de manera que se planifique tiempo suficiente para ejercitar su aplicación de manera integrada (Arnaiz, 2003).

No obstante, concebir la ejercitación con un carácter integrado será objeto de análisis en el siguiente epígrafe, así como procederes metodológicos para la interdisciplinariedad y la utilización de los métodos y medios que deben ser empleados en la ejercitación para el cumplimiento de los requerimientos metodológicos propuestos serán expuestos en próximos epígrafes.

III. LA INTEGRACIÓN SISTEMÁTICA DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Criterios sobre la necesidad de propiciar en la enseñanza la aplicación integrada del contenido han sido revelados por varios autores nacionales y extranjeros, entre los que se destacan:

- "Es necesario incluir en el contenido de la enseñanza, precisamente la esencia escondida tras los fenómenos particulares" (Talízina, 1987, p. 5).
- El contenido que se debe asimilar no son los elementos específicos que se suceden unos a otros y que se van asimilando por separado, sino la esencia que está detrás de ellos. Son fenómenos específicos que en este caso sirven solo como un medio de asimilación, la esencia se conoce mediante el fenómeno (Campistrus, 1989, p. 23).
- "La sustitución de los procedimientos específicos de la actividad cognoscitiva por generalizadores eleva sustancialmente el efecto de desarrollo de la enseñanza, coadyuva a la formación del pensamiento teórico" (Talízina, 1992, p. 61).
- La enseñanza de procedimientos generalizadores y de la esencia oculta tras los fenómenos particulares como vía para la racionalización del proceso docente-educativo (Campistrus y Rizo, 1995).
- La relación entre la solución de problemas matemáticos y el desarrollo de habilidades matemáticas (Delgado, 1999).
- "La integración de las diferentes áreas matemáticas (Aritmética, Álgebra y Geometría) como el sistema de recursos que les sirve a los estudiantes para resolver los problemas prácticos" (MINED, 1999, p.1).
- El enfoque metodológico general de la asignatura en la Secundaria Básica "El tratamiento de los contenidos logrando su sistematización dentro de cada unidad y a lo largo del nivel" (MINED, 1999 b, p.1).

- La interdisciplinariedad y la enseñanza de procedimientos generalizadores y actitudinales como vía para la racionalización y optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje (Macedo, 2001).
- Los procesos integradores que se desarrollan en las ciencias influyen de forma significativa en los objetivos, contenidos y métodos de enseñanza (Pla, 2003).

Igualmente sirve de fundamento lo referido por (Ballester, 1995): La sistematización es la acción y el efecto de organizar algo según un sistema. La exigencia de sistematizar los contenidos dentro de cada unidad, grado y nivel, implica establecer nexos y relaciones de precedencia y consecuencia entre ellos para ordenarlos y estructurarlos, comprender conscientemente las analogías y diferencias, diferenciar lo esencial de lo no esencial, interiorizar cómo se reducen a casos particulares o se generalizan objetos y procesos al variar ciertas condiciones y apreciar las ventajas para resolver una tarea por una u otra vía.

Los planteamientos anteriores constituyen premisas generales muy valiosas desde posiciones de la Didáctica y la Psicología. Sin embargo, el criterio sobre la necesidad de propiciar en la enseñanza la aplicación integrada del contenido de estos autores no se orienta de manera integral y contextualizada para favorecerlo de manera sistemática desde la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

A pesar de los resultados teóricos y prácticos de varias investigaciones realizadas para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la provincia de Ciego de Ávila, hay estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje del contenido matemático en el sentido de poderlo aplicar de manera integrada a la solución de ejercicios y problemas. Estas dificultades se ponen de manifiesto en los resultados de las evaluaciones que se aplican, utilizando como criterio para medir la calidad del aprendizaje, precisamente, en el desarrollo de habilidades en los estudiantes para aplicar de

manera integrada el contenido estudiado a la solución de ejercicios y problemas (Arnaiz, 2003).

A la sistematización del contenido en todos los niveles estructurales del proceso de manera que cada uno de ellos haga el aporte necesario y posible al que lo incluye, en el sentido de que lo ya conocido se integre a lo nuevo para la solución de ejercicios y problemas, el autor lo denomina integración sistemática del contenido. Esta frase se ha identificado con el aprovechamiento de las potencialidades del contenido matemático en cada clase, unidad y asignatura para propiciar la aplicación integrada del contenido en la solución de ejercicios y problemas (Arnaiz, 2003).

Por aplicación integrada del contenido matemático el autor entiende el empleo integrado de elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales en la solución de ejercicios y problemas matemáticos, de manera que lo ya conocido se integre a lo nuevo como vía para su necesaria sistematización y como procedimiento de trabajo. Ella se manifiesta básicamente en el empleo integrado de las habilidades matemáticas para la solución de ejercicios y problemas matemáticos (Arnaiz, 2003, p. 3).

Teniendo en cuenta lo anteriormente expresado el presente epígrafe tiene como propósito ofrecer fundamentos y exigencias didácticas a los docentes que imparten la asignatura Matemática para potenciar en el proceso de enseñanza-aprendizaje la aplicación integrada del contenido en la solución de ejercicios y problemas y de esta manera propiciar un modo de actuación consciente y responsable de los docentes en esta dirección.

Dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje a partir de la idea rectora de propiciar la integración sistemática de los contenidos matemáticos significa aprovechar al máximo las potencialidades existentes en las clases, unidades didácticas, grados y niveles para propiciar la realización de

actividades por los estudiantes dirigidas a la ejercitación de la aplicación del contenido de forma integrada, de manera que desde cada grado de la escuela se haga el aporte necesario y posible a este fin de la enseñanza de la Matemática: aplicar integradamente los contenidos estudiados a la solución de ejercicios y problema (Arnaiz, et al., 2013, p. 7).

Es evidente que este fin de la enseñanza de la Matemática no puede lograrse con el mismo nivel de profundidad en todos los estudiantes, pero ello no significa renunciar a la realización de un trabajo consciente en cada grado para que estos avancen a niveles superiores. Se insistirá en el aporte que puede hacerse desde el grado al desarrollo de procedimientos generalizadores de la asignatura Matemática mediante su integración consciente a los diferentes contenidos que se estudian.

Centrar la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en procedimientos generalizadores está en correspondencia con un importante principio de la Psicología de la Enseñanza, el cual expresa que debe priorizarse la enseñanza de métodos y procedimientos lo suficientemente generales que permitan la solución de diversas y variadas tareas particulares.

En varios documentos metodológicos sobre la enseñanza de la Matemática se insiste en la importancia de que el estudiante llegue a ser capaz de aplicar con carácter integrador los diferentes contenidos estudiados a la solución de ejercicios y problemas. Ejemplo de ello es uno de los lineamientos o ideas claves para el trabajo metodológico de la asignatura: Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, de manera que se integre el saber y el saber hacer de los estudiantes, relacionados con las diferentes áreas de la Matemática e incluso de otras asignaturas (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 2).

Aunque dicho lineamiento es conocido por la mayoría de los profesores, como tendencia, la preparación sistemática que reciben los estudiantes, tanto en la

Secundaria Básica como en el Preuniversitario, para el logro de este fin presenta insuficiencias. En lo anterior incide que no siempre se dirige el proceso hacia el aprovechamiento de las potencialidades para propiciar sistemáticamente, desde las clases de ejercitación, la aplicación integrada del contenido matemático (tanto el nuevo como el precedente).

Para la concreción de este lineamiento o idea clave para el trabajo metodológico de la asignatura Matemática (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014) realizan las siguientes precisiones:

La integración es, a la vez, el resultado y el proceso de unir objetos que ya existen. En consecuencia, la integración de conocimientos es el resultado y el proceso de establecer la pertenencia de algunos de ellos a una clase en la que inicialmente no se conocía que estaban incluidos, mediante la búsqueda de relaciones. Esta integración puede ser vertical (entre conocimientos de una misma asignatura en varios grados o años) u horizontal (entre asignaturas de un mismo curso) (p. 18 y 19).

La integración se obtiene del proceso de sistematización por medio de la generalización y la diferenciación. Mediante la sistematización y la integración se logra racionalidad en el aprendizaje de los contenidos, que son interiorizados como piezas interconectadas de un todo mayor que obedece a determinados principios generales (p. 19).

La sistematización posibilita que los estudiantes concienticen las relaciones entre los conocimientos y las formas de proceder y pensar que les son inherentes, por eso se puede hablar también de la sistematización de habilidades y formas de la actividad mental (p. 19).

Para poder integrar los conocimientos, los estudiantes deben en todas las clases razonar, formularse preguntas y expresarlas al profesor y al grupo, además de intentar responderlas (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Para favorecer la sistematización e integración de los contenidos se debe orientar a los estudiantes la elaboración de resúmenes y diagramas en los cuales se establezcan relaciones de subordinación entre conceptos, se determine qué antecedentes pudieran preceder a la conclusión que se da, se indique qué conclusiones debieran seguir al antecedente que se da, se argumente la equivalencia de diferentes definiciones de un concepto o las distintas formas de formular un enunciado, se representen relaciones entre conceptos y se sinteticen los procedimientos que pueden utilizar para resolver ciertos tipos de tareas (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Al ser el ejercicio matemático el medio principal para el cumplimiento de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, el concepto de integración sistemática del contenido debe expresarse en éstos. Un ejercicio matemático se considera integrador cuando las exigencias planteadas en el mismo demandan de la aplicación integrada del contenido (tanto el nuevo como el precedente). Los ejercicios integradores tienen diferentes grados de complejidad los cuales dependen, entre otras cosas, del volumen de conocimientos y habilidades (tanto matemáticas como del pensamiento lógico) que se deben aplicar (Arnaiz, 2003).

La complejidad de los ejercicios integradores debe estar en correspondencia con el nivel real de desarrollo de los estudiantes a la vez que estos deben ser un medio para propiciarlo, por lo que su selección o elaboración constituye una labor creadora del profesor. Algunos de los que aparecen en los textos actuales pueden perfeccionarse o complementarse en esta dirección, a partir de las características de los estudiantes en cuestión, para desde la clase, la unidad o la asignatura, hacer el aporte necesario y posible al cumplimiento de los objetivos generales de la asignatura (Arnaiz, 2003).

La idea de la ejercitación integrada de los contenidos tiene una repercusión en la organización didáctica de la enseñanza de la Matemática. Debe lograrse, lo más

temprano posible, el dominio por los estudiantes de los conocimientos y habilidades necesarias para producirse el proceso de integración, de manera que se disponga del tiempo requerido para la realización de ejercitaciones integradoras del contenido.

En el PEAM, la tarea docente que predomina es la resolución de ejercicios y problemas, por lo cual se comparte el criterio de (Ruiz, 2007), quien considera que entre las diversas vías, por medio de las cuales se puede lograr la integración de los conocimientos están las siguientes:

1. Proponer una tarea o situación que se pueda resolver utilizando un concepto dado y solicitar el planteamiento de otras que tengan relación con la inicial, de modo que se pueda comenzar a generar un campo de problemas, incluso en el transcurso de varios cursos.
2. Exigir que se resuelva una tarea relacionada con un concepto, utilizando distintos procedimientos y vías de comprobación del resultado.
3. Solicitar que se estimen características de la solución de una tarea y después se resuelva.
4. Orientar la búsqueda de uno o varios conceptos que tengan una propiedad común que pueda expresarse con el concepto dado.
5. Conducir a la búsqueda de uno o varios conceptos que se diferencien en una propiedad que se pueda expresar utilizando el concepto dado.
6. Indicar la escritura de una proposición de distintas formas.
7. Exigir la argumentación de una proposición utilizando diferentes vías.

8. Buscar ejemplos de situaciones en que se aplican determinados conceptos, relaciones y procedimientos (Citado por Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 19).

Los autores consideran que para la integración sistemática de los contenidos, se deben tener en cuenta las siguientes exigencias didácticas:

- Diagnosticar integralmente a los estudiantes sobre el nivel de desarrollo de los procesos cognitivos, valorativos o actitudinales y comunicativos en cuanto a la aplicación integrada del contenido que permita el diseño del proceso hacia la proyección de niveles superiores de desarrollo.
- Pronosticar el desarrollo potencial de los estudiantes en la determinación formulación y motivación hacia el objetivo para el desarrollo de las habilidades matemáticas generalizadas y demás habilidades matemáticas, de las operaciones mentales y procedimientos lógicos, así como de los procesos afectivos y comunicativos.
- Dosificar y seleccionar el contenido de enseñanza de manera que se garantice su vinculación con la vida y con la realidad económica, política y social del entorno, existiendo una lógica y coherente relación entre lo instructivo, lo desarrollador y lo educativo para potenciar la aplicación integrada e interdisciplinaria del contenido mediante la ejercitación como vía para la fijación del mismo.
- Seleccionar métodos, medios y recursos infotecnológicos para la realización de ejercicios y tareas docentes con un estilo de comunicación adecuado en el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática para la atención diferenciada de los estudiantes según sus características, implementando formas de trabajo individuales y grupales.
- Concebir la evaluación del aprendizaje como vía de retroalimentación del proceso y con una concepción que estimule la aplicación integrada del contenido.

Ejemplos de ejercicios y tareas docentes que pueden utilizarse en la ejercitación para la aplicación sistemática de los contenidos pueden ser los siguientes:

1. Dibuja en tu libreta tres centros importantes de tu localidad, considerándolos como punto material, para ello consulte el mapa de la localidad, las enciclopedias u otra fuente.

a) ¿Qué figura geométrica se forma al unir los puntos?

b) Según sus ángulos se clasifica en _____. Justifique.

c) Según sus lados se clasifica en _____. Justifique.

d) Calcule el perímetro de la figura formada según la escala del mapa o de la fuente consultada. Expresé el resultado en km y en m; de ser necesario redondea hasta las décimas.

e) ¿Qué te aportó el proceso de búsqueda de la información?

2. Abre el archivo Circunferencia. ggbll, usando GeoGebra y realiza las siguientes acciones:

a) Clasifica los ángulos $\angle ADC$ y $\angle AOC$ según relación con la circunferencia.

b) Analiza qué relación existe entre la amplitud del ángulo $\angle ADC$ y el ángulo $\angle AOC$.

c) Desplaza el punto A y continúa analizando las relaciones que existen entre los ángulos antes mencionados.

d) Traza una recta tangente a la circunferencia en el punto C.

e) Utilizando la herramienta para medir amplitud de ángulos determina la amplitud del ángulo delimitado por la recta tangente y la cuerda AC.

f) Analiza la relación de este con respecto a los ángulos $\angle ADC$ y $\angle AOC$.

3. Entre dos apartamentos consumen mensualmente 426 Kw/h de energía eléctrica. Después de aplicarse medidas de ahorro, el apartamento A redujo su consumo al 75% y el apartamento B lo disminuyó en 21 Kw/h. Si ahora entre ambos consumen el doble de lo que consumía el apartamento A.

a) ¿Cuál era el gasto de energía de cada apartamento?

b) Mencione algunas medidas de ahorro en el hogar y en la escuela.

4. Según fuente de información de la Agencia de Medio Ambiente, La Habana como parte de las medidas tomadas para el plan de reforestación, entre las plantas frutales intercaladas y las Melíferas se sembraron un total de 41,5 millones de plantas. Si se sabe que las plantas melíferas sobrepasaron la siembra en 30,1 millón a las frutales.

a) ¿Cuántos millones de cada planta sembraron?

b) Si los millones de plantas sembrados representaron el 125%. ¿Cuál era el plan de siembra?

c) ¿Cómo puedes contribuir al cuidado del Medio Ambiente?

5. Dada la siguiente expresión:

$$\frac{3x^3 + 9x^2}{x^2 + 6x + 9} + \frac{12x}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{3x}$$

a) Simplifíquela tanto como sea posible.

b) Si un automóvil parte desde Florencia hacia la ciudad de Morón a una velocidad de 7 m/s y la distancia que hay entre las dos ciudades en m con el valor numérico de la expresión obtenida en el inciso a) para $x = 2$. ¿Qué tiempo demora en llegar a dicha ciudad?

6. Un bosque tiene forma de cuadrilátero con vértices A (0; 200), B (200; 0), C (500; 300) y D(100; 700). Las coordenadas están dadas en metros.

a) Demuestra que tiene forma de trapecio rectángulo.

b) Calcula su área.

c) ¿Cómo se puede contribuir al cuidado y reforestación de los bosques?

7. Un policlínico B se encuentra a 4,0 km al este y 2,0 km al Norte de otro policlínico A, y otro C se encuentra de A a 2,0 km al Oeste y 6,0 km al Norte. Se quiere construir un centro de urgencia médica M que equidiste de estos tres policlínicos. ¿Cuál debe ser su ubicación respecto al policlínico A? ¿A qué distancia se encuentra de A, B y C?

8. Con la utilización del software Matemático GeoGebra realiza las siguientes indicaciones:

8.1) Inicia un nuevo documento con el asistente GeoGebra muestra los ejes de coordenadas en la vista gráfica y céntralos.

8.2) Inserta dos deslizadores con nombres a y b , establece para ellos un rango entre -5 y 5 un incremento de 0.01. Ubícalos en la esquina superior izquierda de la vista gráfica.

8.3) Introduce en la barra de entrada el siguiente texto: $f(x) = ax + b$. Observa qué cambios ocurren en la representación gráfica.

8.4) ¿Qué tipo de función ha sido representada?

8.5) Usa el deslizador a y observa qué ocurre con la representación cuando el valor de a es:

a) negativo.

b) cero.

c) positivo.

8.6) Haya los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas.

8.7) Usa el deslizador b y observa qué ocurre con la representación y los puntos de intersección con los ejes de coordenadas cuando el valor de b aumenta o disminuye:

8.8) Cuál es el dominio de la función.

8.9) Cuál es la imagen de la función cuando el valor de a es:

a) Distinto de cero.

b) Igual a cero.

8.10) En el caso de que a es cero que tipo de función lineal es.

Los fundamentos didácticos presentados en este epígrafe pueden ser útiles a los docentes que imparten la asignatura Matemática para que el diseño del PEAM se realice a partir de un diagnóstico integral de los estudiantes, poniendo énfasis en la enseñanza de procedimientos generalizadores, integradores y actitudinales que lleven al conocimiento de la esencia oculta tras los fenómenos particulares

mediante la utilización de ejercicios y problemas, métodos, medios y recursos infotecnológicos para favorecer el aprendizaje de la Matemática para la aplicación integrada del contenido en la solución de ejercicios y problemas de una manera más eficiente.

Los ejemplos que se ofrecieron propician la aplicación integrada e interdisciplinaria del contenido y en algunos se debe utilizar el recurso infotecnológico GeoGebra, en próximos epígrafes se exponen fundamentos sobre la interdisciplinariedad en el PEAM y la utilización de recursos infotecnológicos; al mismo tiempo en los ejercicios y problemas ejemplificados se manifiesta el empleo integrado de las habilidades matemáticas generalizadas, sobre la fundamentación y operacionalización de las mismas, así como la ejemplificación de ejercicios y problemas para la fijación o el control que contribuyan al desarrollo de las habilidades referidas se dedica el siguiente capítulo.

IV. LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS GENERALIZADAS

El diseño del PEAM en función del desarrollo de habilidades es una regularidad de la enseñanza de la Matemática, lo cual se manifiesta en los objetivos planificados en los diferentes programas de enseñanza al ser un elemento fundamental del contenido y de los objetivos.

Es necesario conceptualizar la definición de habilidad para diseñar el proceso de enseñanza–aprendizaje.

No se puede separar el saber del saber hacer, porque saber es siempre saber hacer algo y no puede haber conocimientos sin habilidades, sin saber hacer. De lo dicho resulta claro que para precisar qué es saber hacer hay que determinar los tipos de habilidades gracias a las cuales funcionan o se manifiestan los conocimientos (Campistrous, 1989, p. 19).

Existe consenso de que las habilidades son modos de actuación que permiten operar con el conocimiento. Entre los principales investigadores de este tema se destacan Danilov y Skatkin (1980); Petrovsky (1985); Brito (1987), Talízina (1988); Campistrous (1989); Álvarez de Zayas (1999); González (2001), Montes de Oca (2001); Osorio (2014); Arnaiz y García (2013); Machado (2013); Arnaiz y García (2014); Salazar (2015); Ballester, et al., (2016); Guillarte (2017), Rodríguez (2010), Martínez (2018); Rodríguez, Rodríguez y Hernández (2018); Rojas, Arnaiz, García, Morales, Martínez y Díaz (2019); Machado (2019); Varela y Alvarado (2019); Rivero (2019), Bueno y González (2020); Hernández, Méndez y Contreras (2021); Morales (2022); quienes arriban a importantes consideraciones sobre las habilidades. Sobre la relación dialéctica entre los conocimientos y las habilidades, la más enfatizada es la referida a que el conocimiento del estudiante se manifiesta fundamentalmente mediante las habilidades, pero debe añadirse que éstas, a su vez, propician el desarrollo del conocimiento.

Para Brito (1987) "las habilidades constituyen el dominio de acciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad con ayuda de los

conocimientos y hábitos que el sujeto posee y son el resultado de la sistematización de las acciones subordinadas a su fin consciente. Le permiten al hombre poder realizar una determinada tarea” (p.51).

Se considera desde el punto de vista psicológico la definición de Álvarez de Zayas (1999) que plantea "las habilidades son estructuras psicológicas del pensamiento que permiten asimilar, conservar, utilizar y exponer conocimientos. Se forman y desarrollan a través de la ejercitación de las acciones mentales y se convierten en modos de actuación que dan solución a tareas teóricas y prácticas” (p.61).

Desde el plano didáctico y metodológico Montes de Oca (2001) describe la habilidad como:

El nivel de dominio de la acción en función del grado de sistematización alcanzado por el sistema de operaciones correspondientes; en otras palabras, para reconocer la presencia de una habilidad es necesario que en la ejecución de la acción se haya logrado un grado de sistematización tal que conduzca al dominio del sistema de operaciones esenciales, necesarias e imprescindibles para su realización, la habilidad es aquel componente del contenido que caracteriza las acciones que el estudiante realiza al interactuar con el objeto de estudio (p.5).

Los autores asumen en este trabajo esta última definición, por entender que recoge los elementos centrales y esenciales que explican de manera precisa el papel de la habilidad dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, pues la formación de las habilidades trae consigo el dominio de acciones y operaciones diversas y ocurre como resultado de la sistematización de dichas acciones subordinadas a objetivo.

“El dominio de una habilidad implica para el que la posee que puede elegir y poner en práctica distintos conocimientos y métodos según el objetivo, condiciones y características de la tarea o problema a resolver” (Morales, 2022, p.18).

Cada ciencia tiene habilidades específicas propias que son objeto de estudio de cada asignatura y se incluyen en los contenidos del programa. Las habilidades están enmarcadas dentro del componente personalizado contenido. Es en el contenido de la Matemática donde se manifiestan los conocimientos, (conceptos, teoremas y procedimientos), habilidades, hábitos, capacidades, experiencia transformadora (investigativa), valores, convicciones y normas de conducta que, al ser asimiladas por los estudiantes en el aprendizaje, posibilitan el cumplimiento de los objetivos planteados.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje se destaca una interrelación entre los diferentes tipos de habilidades: unas son el componente de otras. En consecuencia, centrar la dirección de este proceso en las habilidades generalizadas está de acuerdo con un principio básico de la Psicología de la Enseñanza, que expresa que debe priorizarse la enseñanza de métodos y procedimientos tan generales que permitan dar solución a múltiples tareas particulares.

Esta idea, aparentemente moderna, aparece implícita en textos cubanos de Matemática. González (1974) plantea que:

En la escuela cubana el estudiante tiene que aprender a resolver diferentes tipos de ecuaciones: lineales, cuadráticas, con radicales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales y combinadas (integradas). Si no se enseña la esencia del método para resolver una ecuación cualquiera entonces el estudiante trata de memorizar mecánicamente tantos procedimientos como tipos de ecuaciones estudiadas (p. 34).

En los documentos estatales de planificación y organización del PEAM se concibe: “Desarrollar en los estudiantes habilidades sólidas en el trabajo con algoritmos o cálculos elementales, así como con métodos y procedimientos indispensables” (MINED, 1987, p. 8) es decir, desde hace más de tres décadas ya existe una orientación estatal para la determinación del contenido matemático en

correspondencia con el desarrollo de habilidades mediante procedimientos generalizadores.

Se considera que para garantizar un proceso óptimo y racional a partir de priorizar la enseñanza de procedimientos generalizadores, integradores y actitudinales que permitan al estudiante continuar aprendiendo por sí mismo, se requiere determinar aquellas habilidades generales y esenciales que permitan aplicar, de manera independiente, los conocimientos seleccionados y a partir de ellas obtener nuevos conocimientos (Campistrous, 1989), (Talízina, 1992), (Macedo, 2001) y (Pla, 2003).

En la última década de 1980 Campistrous jugó un papel protagónico en la precisión de las habilidades con tales características (procedimientos generalizadores), identificó las habilidades más generales y esenciales de la asignatura en el Preuniversitario, como consecuencia de una necesidad de la práctica escolar, denominadas por él "habilidades generalizadas" porque los correspondientes modos de actuar trascienden el marco de un conocimiento específico y porque penetran en los tres grados de dicha enseñanza (Campistrous, 1989) y a criterio del autor, también en grados precedentes (Arnaiz, 2003).

Campistrous (1989) en sus trabajos determina las habilidades matemáticas generalizadas para la Enseñanza General Politécnica y Laboral: calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones y propone acciones para el desarrollo de las mismas.

Los autores consideran que su nivel de generalidad propicia que pueda contribuirse a su desarrollo en todos los grados de la Enseñanza General Media (séptimo a duodécimo), excepto las dos últimas que se introducen a partir del octavo grado y conjuntamente cada una incluye varios procedimientos específicos. Esta relación se presenta de la siguiente manera por Arnaiz, et al., (2012):

“Calcular: cálculo con números, cálculo con magnitudes, cálculo con variables, cálculo con radicales, cálculo con razones trigonométricas” (p. 13).

“Evaluar: sustituir variables por números en una fórmula, sustituir variables por números en una expresión, sustituir variables por números en una ecuación o en una función, sustituir variables por variables, sustituir variables por términos” (p. 13).

“Simplificar: simplificar fracciones, simplificar radicales, eliminar signos de agrupación, reducir términos semejantes, simplificar expresiones trigonométricas, simplificar fracciones algebraicas” (p. 13).

“Resolver ecuaciones: resolver ecuaciones lineales, resolver ecuaciones fraccionarias, resolver ecuaciones cuadráticas, resolver ecuaciones con radicales, resolver ecuaciones trigonométricas, resolver ecuaciones exponenciales, resolver ecuaciones logarítmicas” (p. 13).

Descomponer en factores: Extraer de una expresión el factor común numérico, el literal o ambos, descomponer una diferencia de cuadrados o de cubos, descomponer un trinomio cuadrado perfecto, descomponer - siempre que sea posible - un trinomio cualquiera, descomponer polinomios - siempre que sea posible - de cuatro términos o más. (p. 13).

Relacionar gráficos y propiedades de funciones: relacionar gráficos y propiedades de funciones lineales, relacionar gráficos y propiedades de funciones cuadráticas, relacionar gráficos y propiedades de funciones trigonométricas, relacionar gráficos y propiedades de funciones exponenciales, relacionar gráficos y propiedades de funciones logarítmicas (p. 13).

La precisión de estas habilidades representó un aporte teórico a la Didáctica de la Matemática y un progreso con respecto a etapas anteriores, la caracterización ofrecida orientó la labor del docente, a su vez cada una de ellas y todas en su

conjunto constituyeron objeto de otras investigaciones dirigidas a la búsqueda de vías para lograr su desarrollo progresivo en los estudiantes.

A partir del enfoque metodológico general de la asignatura para la Secundaria Básica, en las transformaciones realizadas para esta educación en el 2000, se incluyen como habilidades matemáticas: estimar, procesar datos y esbozar: estas habilidades, aunque han sido objeto de investigaciones en la provincia de Ciego de Ávila no están incluidas dentro de las definidas y operacionalizadas como habilidades matemáticas generalizadas.

Desde el curso 2011-2012 también se incluyen como habilidades matemáticas: leer y escribir números, comparar y ordenar números, traducir del lenguaje común al algebraico, realizar construcciones elementales, entre otras. Asimismo, se utilizan como habilidades en Matemática, habilidades lógicas formales del pensamiento o intelectuales como: definir, demostrar, comparar, identificar, ordenar y argumentar. Solo la habilidad demostrar proposiciones matemáticas ha sido definida y operacionalizada como habilidad matemática generalizada por Arnaiz y García (2014) y rediseñada su operacionalización por Morales (2022).

Los resultados de los proyectos investigativos institucionales "El perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la Física" y "La integración de las habilidades matemáticas en la provincia de Ciego de Ávila" de un grupo de investigadores de la Universidad Máximo Gómez Báez; la socialización e intervención de estos proyectos en el proceso de formación inicial y permanente de los docentes de Matemática y el estudio e intercambio de opiniones acerca de las posiciones teóricas asumidas por los autores en el libro electrónico de Arnaiz, et al. (2013), así como los referentes aportados por Álvarez, Almeida y Villegas (2014) sobre los lineamientos o ideas claves para el trabajo metodológico de la asignatura Matemática (válidas para los diferentes subsistemas de Educación en Cuba), que precisan el enfoque metodológico general de esta; permitieron profundizar en el tema de las habilidades matemáticas.

Las investigaciones realizadas determinaron la necesidad de perfeccionar las definiciones y las acciones, así como la precisión de operaciones para cada una de las habilidades matemáticas generalizadas, que fueron abordadas por Arnaiz y García (2013) y para lo cual constituyó una premisa básica definir el concepto de habilidad matemática generalizada (HMG), como un fundamento teórico de valor para identificar otras habilidades matemáticas generalizadas (Arnaiz y García, 2014).

“Las habilidades matemáticas generalizadas (HMG) son aquellas cuyas acciones conforman un proceder generalizador que permite operar con diferentes conocimientos matemáticos” (Arnaiz y García, 2014, p. 65).

Ellas se refieren no sólo a la preparación del estudiante para aplicar sistemas de acciones carácter algorítmico inherentes a una determinada actividad matemática (calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones), estas habilidades incluyen además, la preparación de los estudiantes para aplicar sistemas de acciones de carácter heurístico para la resolución de problemas y las demostraciones de proposiciones matemáticas (Arnaiz y García, 2014).

La definición de HMG, el creciente nivel de sistematicidad de la resolución de problemas y de las demostraciones en el PEAM en la escuela cubana, constituyen fundamentos para asumir la resolución de problemas matemáticos y la demostración de proposiciones matemáticas como HMG (Arnaiz y García, 2014).

Muy relacionadas con las habilidades matemáticas generalizadas, las habilidades o procedimientos del pensamiento lógico, aunque trascienden el trabajo en la asignatura, varias de ellas de ellas forman parte de operaciones de las HMG. Campistrous (1995) precisó las habilidades o procedimientos asociados a las tres formas del pensamiento lógico: conceptos, juicios y razonamientos. Ellas son:

- Para los conceptos: asociar propiedades, reconocer propiedades, identificar, distinguir propiedades, comparar, describir, caracterizar, definir, clasificar, sistematizar, ejemplificar, limitar el concepto.

- Para los juicios: identificar valor de verdad de juicios simples, identificar valor de verdad de juicios compuestos, transformar juicios, negar juicios, particularizar juicios universales, generalizar.
- Para los razonamientos: inferencias inmediatas, deducciones básicas (separación, hipotéticas, silogísticas, fundamentación y refutación), argumentación, inferencias reductivas, demostraciones directas y demostraciones indirectas.

Para el desarrollo de las HMG es necesario la formación y desarrollo de operaciones mentales y procedimientos lógicos como generalizar, concretar, comparar, abstraerse, clasificar, generalizar, limitar, definir, fundamentar, conjeturar e inferir, entre otros.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos asumidos en la tesis de Maestría de Rodríguez (2008), los resultados de los proyectos ya referidos y divulgados por Arnaiz y García (2013); Arnaiz y García (2014); Arnaiz, García y López (2015) se definen las HMG: calcular, evaluar, resolver ecuaciones, descomponer en factores, simplificar, relacionar gráficos y propiedades de funciones, resolver problemas matemáticos y demostrar proposiciones matemáticas; así como se determinan las acciones y operaciones que deben realizarse para su desarrollo.

1ª: Calcular:

“Calcular es una habilidad matemática generalizada que consiste en transformar una expresión matemática dada en un número o un representante de un número, mediante la ejecución ordenada de operaciones matemáticas” (Arnaiz y García, 2015, p. 65).

Acciones y operaciones:

1. Identificar el cálculo que debe realizarse.
 - Determinar el tipo de cálculo (aritmético, algebraico o geométrico).
 - Precisar qué términos conforman la expresión dada.

- Identificar las operaciones que intervienen.

2. Encontrar la vía de solución.

- Identificar las definiciones, reglas y transformaciones que deben ser utilizadas. (conversión de magnitudes, conversión a una misma notación)
- Determinar el orden en que deben realizarse las operaciones.

3. Determinar el número o un representante.

- Transformar los términos en otros más sencillos e irreducibles (realizar las conversiones).
- Realizar las operaciones según el orden determinado.
- Expresar el resultado (Arnaiz y García, 2013, p. 65).

2ª: Evaluar:

“Evaluar es una habilidad matemática generalizada que consiste en determinar el valor de una expresión matemática dada como resultado de sustituir las variables que en ella aparecen por números, variables, términos u expresiones” (Arnaiz y García, 2013, p.66).

Acciones y operaciones:

1. Identificar la expresión que debe evaluarse.(operación, fórmula, función).

- Precisar qué términos conforman la expresión dada.
- Identificar las operaciones que intervienen.
- Determinar el lugar que ocupan las variables que deben ser evaluadas, en cada término de la expresión dada.

2. Transformar la expresión dada.

- Sustituir las variables en la expresión.
- Utilizar las definiciones, reglas y transformaciones necesarias (conversión de magnitudes, conversión a una misma notación).

3. Calcular el valor de la expresión matemática dada.

- Identificar el cálculo que debe realizarse.
- Encontrar la vía de solución.
- Determinar el número o un representante (Arnaiz y García, 2013, p. 66)

3ª: Resolver ecuaciones:

“Resolver ecuaciones es una habilidad matemática generalizada que consiste en transformarla en una ecuación más sencilla, utilizando los conocimientos y habilidades precedentes” (Arnaiz y García, 2013, p. 67).

Acciones y operaciones:

1. Realizar transformaciones si es necesario.

- Reducir términos semejantes
- Factorizar
- Evaluar
- Calcular

2. Reconocer el tipo de ecuación.

- Comparar la ecuación con alguno de los tipos de ecuaciones estudiados (polinómica, fraccionaria, con radicales, trigonométrica, exponencial, logarítmica, otras)
- Escribir la ecuación transformada como alguno de esos tipos.

3. Seleccionar el procedimiento de solución.

- Comprobar que se cumplen las condiciones exigidas en el procedimiento.
- Aplicar la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico correspondiente.

4. Calcular.

- Identificar el cálculo que debe realizarse.
- Encontrar la vía de solución.
- Determinar el número o un representante.

5. Comprobar las soluciones.

- Reflexiones lógicas sobre la existencia o no de la solución.
- Evaluar en ambos miembros de la ecuación.
- Determinar si los miembros de la ecuación son iguales o no.
- Expresar el conjunto solución (Arnaiz y García, 2013, p. 67).

4ª: Descomponer en factores:

“Descomponer en factores es una habilidad matemática generalizada que consiste en convertir una expresión matemática en el producto de una cantidad finita de otras expresiones” (Arnaiz y García, 2013, p. 68).

Acciones y operaciones:

1. Identificar el tipo de descomposición en el siguiente orden:

- Factor común
- Binomio
- Trinomio
- Polinomio (en una variable o en varias variables).

2. Descomponer según la regla seleccionada.

3. Calcular.

- Identificar el cálculo que debe realizarse.
- Encontrar la vía de solución.
- Determinar el número o un representante.

4. Comprobar si la expresión está facturada completamente y si no lo está repetir los pasos para el factor que lo requiera (Arnaiz y García, 2013, p. 68).

5ª: Simplificar:

“Simplificar es una habilidad matemática generalizada que consiste en reducir una expresión matemática dada a una más sencilla, utilizando identidades, propiedades, operaciones de cálculo y reglas” (Arnaiz y García, 2013, p. 69).

Acciones y operaciones:

1. Identificar el tipo de simplificación en la expresión dada (términos semejantes, fracciones, radicales, expresiones trigonométricas, logaritmos, exponentes).

2. Reconocer las reglas a utilizar.

- Descomponer en factores.
- Divisibilidad.
- Supresión de signos de agrupación.
- Propiedades de las potencias, logaritmos y radicales.
- Identidades trigonométricas.

3. Calcular en casos necesarios.

- Identificar el cálculo que debe realizarse.
- Encontrar la vía de solución.
- Determinar el número o un representante.

4. Comprobar que la expresión no admite otra simplificación (Arnaiz y García, 2013, p. 69).

6ª: Relacionar gráficos y propiedades de funciones:

“Relacionar gráficos y propiedades de funciones es una habilidad matemática generalizada que consiste en representar la relación que existe entre datos numéricos o cantidades (dependencia funcional), mediante una expresión analítica o una gráfica, utilizando las propiedades” (Arnaiz y García, 2013, p. 70).

Acciones y operaciones:

1. Identificar el tipo de una función expresada analíticamente.

- Identificar las magnitudes que están relacionadas.
- Realizar transformaciones algebraicas en la expresión analítica.

- Comparar la función dada con los modelos analíticos generales conocidos.

2. Identificar el tipo de una función expresada gráficamente.

- Identificar las magnitudes que están relacionadas.
- Determinar algunas de las propiedades que cumple la función (dominio, imagen, intercepto con los ejes coordenados, monotonía, paridad).
- Identificar si el gráfico es resultado de transformaciones aplicadas a otro.
- Comparar la función dada con las representaciones gráficas conocidas.

3. Representar gráficamente la función, dada la expresión analítica.

- Identificar el tipo de función.
- Hacer un esbozo del gráfico de la función, si es posible.
- Determinar las propiedades que cumple la función.
- Dibujar el gráfico según las propiedades.

4. Representar analíticamente la función, dada su representación gráfica.

- Identificar el tipo de la función a partir del gráfico.
- Representar el modelo analítico general del tipo de función identificado.

- Determinar la expresión analítica de la función utilizando el modelo general (Arnaiz y García, 2013, p. 70).

7ª: Resolver problemas matemáticos:

“Resolver problemas matemáticos es una habilidad matemática generalizada que consiste en un proceso de búsqueda de procedimientos desconocidos para de una situación inicial conocida llegar a una situación final desconocida” (Arnaiz y García, 2014, p. 65).

Acciones y operaciones:

1. Comprender el enunciado del problema.

- Leer cuidadosamente y comprender el significado del texto.
- Reproducir el contenido con tus propias palabras.
- Separar lo dado de lo buscado.
- Confeccionar, si es posible, una figura de análisis que ilustre la situación.
- Relacionar el problema con alguna esfera de la vida y áreas de la Matemática.

2. Encontrar la vía de solución.

- Reflexionar sobre los procedimientos, estrategias, reglas y medios auxiliares heurísticos.
- Elaborar un plan de solución.
- Reflexionar sobre la vía planificada.

3. Realizar el plan elaborado.

- Identificar los pasos según el orden planificado.

- Calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones, según las necesidades.
- Identificar si se determinó lo buscado.

4. Comprobar la solución, evaluarla críticamente y dar la respuesta.

- Relacionar lo encontrado con el texto del problema (reflexiones lógicas y comprobación matemática)
- Reflexionar sobre otras vías de solución.
- Valorar la posibilidad de utilizar las vías de solución en otros problemas.
- Responder la pregunta formulada en el problema (Arnaiz y García 2014, p.65 y 66).

8ª: Demostrar proposiciones matemáticas:

Demostrar proposiciones matemáticas es una habilidad matemática generalizada que consiste ante todo en enmarcar una situación dada en un concepto matemático, es decir, constatar que esa situación dada cumple o no con las características esenciales de un concepto. Ello se logra a través de una cadena finita de inferencias lógicas, aplicando los conceptos y teoremas ya estudiados. Cuando se utiliza solo una inferencia lógica se está en presencia de una fundamentación (Arnaiz y García, 2014, p. 66).

Acciones y operaciones:

1. Reflexionar sobre la proposición dada.
 - Identificar el concepto relacionado con lo que se debe demostrar.
 - Sustituir los conceptos por sus definiciones.
 - Identificar la estructura lógica de la proposición (premisas, tesis)
 - Sustituir, si es necesario, la proposición por otra equivalente.
 - Establecer relaciones con otras proposiciones que tengan premisas y tesis similares.
2. Encontrar la vía de demostración.
 - Reflexionar sobre los procedimientos, estrategias, reglas y medios auxiliares heurísticos.
 - Elaborar un plan de demostración (directa, indirecta) donde se precisen las inferencias lógicas necesarias
 - Reflexionar sobre la vía demostración.
3. Representación de la demostración.
 - Representar por escrito la cadena de inferencias y las fundamentaciones que la hacen comprensible.
 - Elaborar una oración que exprese lo que se ha demostrado.
4. Evaluar críticamente la demostración.
 - Valorar si los pasos dados son suficientes.
 - Valorar la cantidad de fundamentaciones indispensables.
 - Reflexionar sobre las relaciones lógicas utilizadas.

- Valorar el lenguaje y simbología utilizada.
- Valorar la posibilidad de utilizar la vía de demostración en otras situaciones (Arnaiz y García, 2014, p.66 y 67).

En la investigación realizada por Morales (2022) propone para la HMG demostrar proposiciones matemáticas, las siguientes acciones y operaciones:

1. Reflexionar sobre la proposición dada.

- Sustituir las denominaciones de los conceptos por sus significados.
- Identificar la estructura lógica de la proposición (premisas, tesis)
- Sustituir, si es necesario, la proposición por otra equivalente.
- Establecer relaciones con otras proposiciones que tengan premisas y tesis similares.
- Identificar el concepto o teorema en el que se debe enmarcar la situación exigida en la demostración.

2. Encontrar la vía de demostración.

- Determinar la situación de partida.
- Utilizar símbolos matemáticos para representar la situación dada.
- Construir una figura de análisis.
- Seleccionar qué elementos de la premisa son necesarios para llegar a la tesis.
- Elaborar un plan de demostración (directa, indirecta, por contraposición, constructiva o por construcción, por principio de

inducción matemática) donde se precisen las inferencias lógicas necesarias.

3. Reflexionar sobre la vía demostración.

- Reflexionar si la vía de solución es única.
- Buscar otras vías de solución, de ser posible.
- Identificar cuál de las vías es la más racional.

4. Representación de la demostración.

- Representar por escrito la cadena de inferencias y las fundamentaciones.
- Revisar cada paso para ver si son correctas las relaciones y las fundamentaciones dadas.

4. Evaluar críticamente la demostración.

- Analizar qué errores se cometieron durante la realización de la demostración y como se solucionaron.
- Valorar la posibilidad de utilizar la vía empleada en otras demostraciones (Morales, 2022, p.85 y 86).

El proceso de integración del contenido debe lograrse no solo en el marco de una habilidad generalizada, sino entre ellas, concibiéndose en la organización y planificación de todos los niveles estructurales del proceso (clase, unidad temática, unidad y asignatura).

Por ejemplo, cuando se estudian las funciones lineales, aunque la habilidad generalizada principal, es la de relacionar gráficos y propiedades de funciones, deben aprovecharse las potencialidades de este contenido para integrarlo con

otros estudiados: cálculo con números y con variables; sustitución de variables por números, variables o términos; reducción de términos semejantes, resolución de ecuaciones; cálculo geométrico; cálculo porcentual, entre otros.

Las definiciones, acciones y operaciones para las HMG están en correspondencia con las habilidades que se derivan del dominio de las acciones requeridas para la ejecución de procedimientos matemáticos específicos, así como habilidades lógicas e intelectuales, que permiten interpretar, elaborar y comunicar ideas matemáticas con ayuda de la terminología y simbología matemáticas, valorar cada inferencia y conceptualización que se realice, y detectar posibles errores (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Los referentes teóricos de los proyectos anteriores fueron asumidos en Trabajos de diploma y tesis de Maestría y Doctorado (Arnaiz, García, Rojas y Díaz, 2018), así como en la Concepción didáctica para aplicar integradamente las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas (Arnaiz, García y Díaz, 2020), como uno de los resultados del proyecto de investigación: “Sistematización de los resultados científicos de las didácticas en la provincia de Ciego de Ávila” de un grupo de investigadores de la Universidad Máximo Gómez Báez.

Las propuestas de las investigaciones referidas en el párrafo anterior ofrecen la selección, reelaboración o elaboración de ejercicios para las clases de modo que cada estudiante, según su desarrollo, pueda desarrollar habilidades matemáticas generalizadas sistemáticamente mediante exigencias crecientes en cuanto a la aplicación del contenido de forma integrada. A continuación, se ofrece una muestra de algunos ejercicios y problemas propuestos en dichas investigaciones, se explica el grado profundidad (de dificultad y de complejidad) y de esta forma las habilidades que se pueden desarrollar con la solución de los mismos.

1. Complete los espacios en blanco de la siguiente tabla:

a	b	c	a + b · c	(a + b) · c
2	-2	3		
2	3	-2		

-2	-5	-6		
-2	5	6		
4	-3	-5		
-9		5	6	
	9	6		30
7		-1		-12
2,19	-3,1	4		
0,273	8,22	7		
12,6		-5	3,45	
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$		
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{5}$	$-3\frac{2}{5}$		
$3\frac{4}{5}$	-4,07	$\frac{2}{5}$		
2	$(23,2)^2$	-1225		

Nótese en la tabla anterior, que el ejercicio presenta diferentes niveles de dificultad y complejidad: los estudiantes deben evaluar variables por números y se requiere tener en cuenta el orden de las operaciones y el trabajo con signos de agrupación; existen algunos que solo exigen operar con números enteros (para los estudiantes menos aventajados) y otros para cuya solución se requiere del trabajo con ecuaciones. En varios se sistematizan exigencias que frecuentemente traen dificultades a los estudiantes: adición de números decimales con diferentes lugares después de la coma y sustracción de números decimales con más lugares en el sustraendo que en el minuendo. Aquí se presentan algunos incisos para cuya solución el estudiante debe aplicar de forma integrada tres habilidades: evaluar, calcular y resolver ecuaciones.

2. Dada la función $g(x)=2x+1$, se puede pedir a los estudiantes que argumenten cuáles de los pares pertenecen o no a $g(x)$.

a) $(1; 3)$ $(2; 5)$ $(3; 8)$	b) $(-1; -1)$ $(-2; -5)$ $(-4; -7)$	c) $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right)$ $\left(-3\frac{1}{2}; 6\right)$ $(0,01; 1,02)$ $(-0,01; 0,98)$
d) $\left(\frac{2^3 - 7,25}{-3}; 0,5\right)$	e) $(a; 2a)$ $(2a; 4a + 1)$ $(a^2; 2a + 1)$ $(a + b; 2a + 1 + 2b)$	

Obsérvese que en dependencia del número que seleccione el profesor para la abscisa (natural, entero, racional, fraccionario o decimal), una operación combinada o un término, estará propiciando o no la integración de diferentes niveles de profundidad del cálculo numérico o algebraico (último inciso) al nuevo contenido. En este ejercicio el estudiante debe aplicar de forma integrada las habilidades calcular y evaluar, esta última con dos niveles de profundidad: sustituir variables por números y sustituir variables por términos.

3. Dada la función: $f(x) = 3\frac{1}{4}(\sqrt{4}x - 1) - \frac{1}{2}\left(x - 35\frac{1}{2}\right)$

- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que ella representa? o Expresa la función f en la forma $f(x) = m x + n$.
- Determina el cero de dicha función o ¿dónde corta la recta al eje de las abscisas?
- ¿Qué valores deben tomar a y b para que los pares $(a; 7)$ y $(5; b)$ pertenezcan a la función?
- Represéntela gráficamente.
- Calcula la imagen de la función para los siguientes valores: $0,5$; a ; $2a$; -1 .

- f) ¿Cuál es el área de la figura formada por esta recta y los ejes de coordenadas?
- g) ¿Qué por ciento representa esta área de la de un cuadrado de lado igual a 2 u?

En la solución de este ejercicio integrador se deben realizar cálculos con números en diversas expresiones (no cómodos) y con variables, resolver ecuaciones; sustituir variables por números, por variables y por términos; reducir términos semejantes, calcular áreas de figuras planas (triángulo y cuadrado) y realizar el cálculo porcentual. Es decir, en su solución se exige la aplicación integrada de varias habilidades generalizadas de las que se fundamentaron en este epígrafe (calcular, evaluar, resolver ecuaciones, simplificar y relacionar gráficos con propiedades y funciones).

4. Con una pieza rectangular de material nylon sintético cuyos lados miden 4,6dm y 22cm, se quiere hacer un tapiz para una silla circular de radio $r = 1,7$ dm ¿Qué cantidad de nylon sobra después de hacerlo y qué por ciento representa del total?

Este ejercicio permite sistematizar la fórmula para calcular el área del rectángulo, fijar la del área del círculo, el cálculo con magnitudes y proporciones. En su solución se aplican de forma integrada las habilidades: calcular, evaluar, simplificar y resolver ecuaciones.

La complejidad de los ejercicios integradores, es decir, el nivel de profundidad del contenido, debe estar en correspondencia con el nivel real de desarrollo de los estudiantes, a la vez que estos deben ser un medio para elevar los niveles de desarrollo, por lo que su selección o elaboración de estos ejercicios constituye una labor creadora del profesor. Algunos de los que aparecen en los textos actuales pueden perfeccionarse o complementarse en esta dirección, para desde la clase, la unidad temática, la unidad o la asignatura, hacer el aporte necesario y posible al cumplimiento de los objetivos generales de las asignaturas en cada subsistema de educación, ya que el criterio de la aplicación integrada del contenido a la resolución de ejercicios y problemas constituye una vía objetiva de medir el cumplimiento de los mismos.

Los fundamentos didácticos sobre las habilidades matemáticas generalizadas, la sistematización y actualización expuesta como aporte a la Didáctica de la

Matemática, pueden ser utilizados en la formación de los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación. Matemática como fuente bibliográfica complementaria en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Didáctica de la Matemática, del mismo modo pueden ser utilizados para la preparación metodológica de los profesores en ejercicio.

V. LA INTERDISCIPLINARIEDAD EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Las crecientes complejidades de la sociedad actual demandan aprendizajes integradores en los seres humanos para explicar, transformar y tomar decisiones fundamentadas al enfrentar problemáticas en diferentes contextos. La problematización y la contextualización constituyen un principio didáctico ineludible para motivar el estudio de las Matemáticas y otras ciencias en las jóvenes generaciones, que reclaman sean atendidas sus intereses y preocupaciones de su entorno local y social (Barrios, Pedroso, Luis y Gibert, 2022).

Se debe “reconocer las potencialidades que tiene la Matemática como actividad humana para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida práctica, para comprender el mundo con una concepción científica y desarrollar convicciones y cualidades de la personalidad” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.177).

Para contribuir a los aprendizajes integradores en el PEA de la Matemática se deben conocer los fundamentos sobre la interdisciplinariedad para poder dirigir dicho proceso estableciendo relaciones interdisciplinarias con otras asignaturas.

La interdisciplinariedad es un acto de cultura y no una simple relación entre contenidos, sino que su esencia radica en su carácter educativo, formativo y transformador en la convicción y actitudes de los sujetos, es una manera de pensar y de actuar para resolver los problemas complejos y cambiantes de la realidad, con una visión integrada del mundo, en un proceso basado en relaciones interpersonales de cooperación y de respeto mutuos, es decir, es un modo de actuación y una alternativa para facilitar la integración del contenido, para optimizar el proceso de planificación y dar tratamiento a lo formativo (Fiallo, 2003, p.9).

El propio autor plantea además, que la interdisciplinariedad es:

Una vía efectiva para contribuir al logro de la relación mutua del sistema de hechos, fenómenos, conceptos, leyes y teorías que se abordan en la escuela y permiten garantizar un sistema general de conocimientos y habilidades tanto de carácter intelectual como práctico, un sistema de valores, convicciones y relaciones hacia el mundo real y objetivo; lo que permite desarrollar en los estudiantes una cultura general con la finalidad de prepararse integralmente para la vida social (Fiallo, 2003, p.24).

Otros investigadores como: Álvarez (2001), Alvarado (2004), (Ilizástigui, 2010) han abordado la interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza-aprendizaje, haciendo énfasis en la necesidad de vincular el aprendizaje con situaciones vivenciales de los estudiantes, para la comprensión lógica del contenido y posibilitar así la estructuración de los conocimientos en los planes de estudio y diseños curriculares.

En el ámbito educativo la interdisciplinariedad es la vinculación de los contenidos de una disciplina o asignatura con otra, de esta forma, aquello que se aborda como objeto de aprendizaje en Matemática, por ejemplo, es implementado porque resulta de utilidad práctica para tratar un tema o contenido en Ciencias Naturales o Física o Química. El carácter interdisciplinario de las disciplinas de la malla curricular debe ser incorporado por el docente desde la Metodología y la Didáctica a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje para mejorar sus resultados (Rubio, 2015).

La interdisciplinariedad favorece la formación de un pensamiento flexible y una mejor preparación del hombre para la vida de manera que pueda resolver los problemas que la sociedad le impone, aplicando lo aprendido en la escuela. La importancia de las relaciones interdisciplinarias para el desarrollo social e individual está dada por las siguientes ventajas:

- Elimina las fronteras entre las disciplinas, erradicando los estancos en los conocimientos de los estudiantes, mostrándoles la naturaleza y la sociedad en su complejidad e integridad.
- Aumenta la motivación de los estudiantes, al necesitar de la búsqueda bibliográfica e investigaciones para poder integrar y aplicar sus conocimientos en los temas de las diferentes disciplinas.
- El estudiante asimila menos conceptos, pues estos son más generales (disminuye el volumen de información a procesar y a memorizar).
- El estudiante desarrolla más las habilidades intelectuales, prácticas y de trabajo docente, al aplicarlas y consolidarlas mediante el trabajo en las diferentes disciplinas que se imparten en las distintas actividades docentes y extradocentes.
- Se forman normas de conducta que se convierten en hábitos, al lograr la acción coherente y sistemática de todas las influencias educativas potenciales de la institución escolar, acordes con el sistema de valores que requiere la sociedad.
- Educa un pensamiento más lógico, crítico, reflexivo e integrador reflejando la complejidad de la propia naturaleza y de la sociedad.
- Despierta el interés de los docentes por la investigación y búsqueda de conocimientos al sentir la necesidad de integrar los contenidos de las diferentes disciplinas.

- Propicia mejores relaciones de trabajo en el colectivo de docentes de la institución escolar (Fiallo, 2001, p. 43).

En la actualidad se ha incrementado el interés por el tratamiento de este tema, sin embargo, la experiencia demuestra que, hasta hoy, la interdisciplinariedad se trata como cuestión teórica y aspiración en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje. En la Didáctica de la Matemática esta carencia se manifiesta, a partir del enfoque disciplinar en el tratamiento de los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (nivel general), en el tratamiento de situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática (nivel particular) y en el tratamiento de complejos de materias (nivel singular). En el primer nivel los procedimientos existentes para determinar las relaciones entre los contenidos en la Matemática (cortes verticales y cortes horizontales a los programas) (Ballester, et al., 1992), tienen un alcance solo disciplinar, es decir, no más allá de las fronteras de la Matemática.

Ello provoca que la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática esté centrada básicamente en el análisis de los contenidos y métodos de la asignatura, sin atender con la sistematicidad necesaria los niveles de integración que deben tener con los contenidos de las demás asignaturas del currículo, con los contenidos de los programas directores y con los contenidos de la educación cubana para lograr los objetivos formativos.

Potenciar la interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática facilita profundizar en la científicidad del contenido y la relación de la teoría con la práctica, permite al estudiante transitar por los diferentes niveles de asimilación, aplicar los conocimientos y habilidades matemáticas en su modo de actuación; así como solucionar problemas de su contexto.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde una perspectiva interdisciplinaria ha de propiciar la cooperación, la solidaridad, el respeto al criterio ajeno a partir de las propias tareas que lleven a la búsqueda, a la indagación, a la socialización de aquello que se ha buscado en otras fuentes de información, que

se potencie el trabajo en equipos, que el estudiante crezca psicológica, afectiva y emocionalmente desde la integración y sistematización de los contenidos matemáticos y que se puede transferir a otras asignaturas (Rubio, 2015).

Las investigaciones sobre la interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: Álvarez (1997), Álvarez (2001), Hernández (2002), Alvarado (2004), (Ilizástigui, 2010) coinciden en la determinación de los denominados nodos como una de las formas particulares o específicas para lograrla.

“El nodo interdisciplinario es un contenido en torno al cual converge al menos un contenido de otra asignatura del currículo para sistematizar los nexos interdisciplinarios en el proceso de enseñanza-aprendizaje” (Ilizástigui, 2010, p.59) y “los nexos interdisciplinarios son el reflejo consecuente de las relaciones objetivas existentes entre los objetos, fenómenos y procesos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento, en el contenido de las diferentes disciplinas” (Ilizástigui, 2010, p.59).

Sintetizando los aspectos teóricos planteados por diferentes investigadores del tema se propone un procedimiento metodológico para el tratamiento interdisciplinario del contenido matemático, que puede ser útil para lograr un trabajo sistemático en los diseños de los sistemas de clases de la asignatura Matemática, el mismo consiste en:

- a) Derivar, determinar y formular los objetivos para el contenido matemático a partir de los nexos interdisciplinarios y del diagnóstico de los estudiantes.
- b) Seleccionar los contenidos matemáticos a partir de los cortes verticales y horizontales teniendo en cuenta los nexos interdisciplinarios establecidos.
- Determinar las relaciones existentes entre los contenidos de la educación cubana, programas directores y líneas directrices de la Matemática.
- Determinar los nodos interdisciplinarios.
- Determinar los nexos a partir de los nodos mediante la aplicación de un corte horizontal ampliado.

- Concebir tareas docentes interdisciplinarias.
- Seleccionar los métodos y medios teniendo en cuenta los objetivos del programa y los nexos interdisciplinarios precisados.
- Diseñar y aplicar la evaluación del aprendizaje con una concepción integradora que evalúe las habilidades matemáticas generalizadas, las habilidades o procedimientos del pensamiento lógico y el desarrollo de los procesos afectivos y comunicativos, como vía de retroalimentación del proceso y de estimulación a la actividad intelectual independiente de los estudiantes.

El procedimiento exige del cumplimiento de cada una de las acciones las cuales son explicadas a continuación:

- ❖ Determinar las relaciones existentes entre los contenidos de la educación cubana, programas directores y líneas directrices de la Matemática.

Los contenidos de la educación cubana, están encaminados a la: Educación patriótica, Educación ciudadana y jurídica, Educación científico-tecnológica, Educación para la salud, la educación física y la sexualidad con enfoque de género, Educación estética, Educación politécnica, laboral, económica y profesional, Educación para la comunicación, Educación ambiental para el desarrollo sostenible, Educación para la orientación y proyección social; los que desempeñan un papel fundamental como contenidos culturales relevantes, necesarios para la vida y la convivencia, en la formación integral que demanda la sociedad a través de una educación en valores; para que los estudiantes se sensibilicen y asuman posiciones correctas ante los problemas y sean capaces de enjuiciarlos de manera crítica. Estos se potencian en la asignatura Matemática fundamentalmente en la resolución de problemas.

Los programas directores facilitan otra de las formas de lograr la interdisciplinariedad, considerando los principales contenidos de las asignaturas: Matemática, Lengua Materna e Historia, constituyendo documentos rectores que guían la planificación, ejecución y evaluación de las acciones de las asignaturas que se imparten en las educaciones de manera que se alcancen los objetivos

propuestos. Los programas directores establecen, por grados, aspectos comunes que son de obligatorio cumplimiento para cada una de las disciplinas que conforman el plan de estudio, con la finalidad de formar un estudiante preparado para entender su contexto con los conocimientos necesarios de cada ciencia.

Las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática son referidas a aspectos principales del contenido que atraviesan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, que permiten determinar lo esencial a lograr desde el punto de vista de los objetivos en los niveles, grados y en general, en el subsistema de Educación General, lo que posibilita hacer inferencias en relación con la selección y ordenamiento de los contenidos y la orientación didáctica de su tratamiento, estas están definidas como:

Líneas directrices relativas a conocimientos, habilidades y formas de pensamiento matemático específicas:

- Dominios numéricos
- Trabajo con magnitudes
- Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones
- Correspondencias y funciones
- Geometría
- Combinatoria y probabilidades
- Tratamiento de datos/estadística

Líneas directrices relativas a habilidades, capacidades y hábitos matemáticos de carácter más general, que requieren también del desarrollo de cualidades, convicciones y actitudes:

- Adiestramiento lógico-lingüístico
 - Argumentar matemáticamente
 - Operar con conceptos matemáticos
 - Comunicarse utilizando la terminología y simbología matemáticas
 - Trabajar con representaciones de objetos matemáticos
- Modelar
- Utilizar recursos para la racionalización del trabajo mental y práctico
- Formular y resolver problemas (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 33 y 34).

Las líneas directrices de las relaciones interdisciplinarias son formas específicas o particulares de lograr la interdisciplinariedad, las que a continuación se plantean y desarrollan deben tenerse en cuenta cualquiera sea la forma curricular que se utilice y cualquiera sea la sociedad actual de la que se hable:

- La del sistema de hechos, fenómenos, conceptos, leyes y teorías.
- La del desarrollo de las habilidades intelectuales, prácticas y de trabajo docente.
- La del sistema de valores morales.
- La del componente politécnico.
- La del componente laboral.
- La del componente investigativo.
- La de educación ambiental (Fiallo, 1996, p. 8).

Estas son las posibles relaciones interdisciplinarias que se manifiestan con más regularidad en la escuela, pero no significa que sean las únicas. El docente a partir de su experiencia y conocimiento del tema puede establecer estas relaciones siempre que sea posible dentro y fuera de la clase en el momento que considere oportuno. Su establecimiento, en aras de evitar la espontaneidad y la incoherencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, requiere de un trabajo cooperado entre los docentes que integran el colectivo, de manera que a partir de los objetivos a alcanzar se aborde cómo se va a proceder en cada una de las asignaturas.

Las relaciones interdisciplinarias que se reflejan en los conocimientos desde el punto de vista cronológico, se manifiestan también en el resto de las líneas directrices, ya que se pueden encontrar en lo referido a las habilidades, los valores, entre otras. En el desarrollo de las habilidades en los estudiantes, los docentes deben ser muy cuidadosos con las actividades que proponen, teniendo en cuenta no solo los conocimientos que estos deben asimilar, sino las acciones y operaciones que deben efectuar. La parte orientadora resulta fundamental para la acción, ya que sin saber qué hacer y cómo hacerlo, la ejecución resultaría una ejecución a ciegas; sin embargo, una buena de la orientación propicia una ejecución adecuada para la asimilación del contenido de la actividad.

Por lo explicado anteriormente y de la necesidad de hacer una enseñanza racional a partir del volumen de información a la que están sometidos los estudiantes es que se hace imprescindible la unidad de cada una de las asignaturas en la base de la orientación que se ofrece para desarrollar la acción.

❖ Determinar los nodos interdisciplinarios:

Teniendo en cuenta que cuenta la definición asumida de nexos interdisciplinarios, es necesario para establecer dichos nexos que con anterioridad los docentes determinen los nodos interdisciplinarios.

Una incorrecta interpretación del concepto de nodo puede traer consigo que muchos docentes asuman una tendencia mundial que existe, avalada por diferentes investigaciones realizadas, de asociar las relaciones interdisciplinarias solo en lo referido a los conocimientos que se imparten en la escuela; algunas

incluso son más abarcadoras al considerar también como parte de estas el sistema de habilidades, hábitos y capacidades que deben lograrse de conjunto como resultado del proceso educativo, es decir, confunden el término de relación intermateria que es la vinculación de los contenidos entre una asignatura y otra, con el de relación interdisciplinaria que es más amplio, pues éstas no solo son las que abarcan los nexos o nodos que se pueden establecer entre los sistemas de conocimientos de las asignaturas, sino también aquellos vínculos que se pueden crear entre los modos de actuación, formas de pensar, cualidades, valores y puntos de vista que potencian las diferentes asignaturas.

Para la determinación de nodos interdisciplinarios se ofrecen los siguientes pasos:

- Estudiar el currículo y programas de asignaturas del grado y sus potencialidades para establecer los nexos interdisciplinarios a partir de los contenidos que se reflejan desde el punto de vista cronológico.
- Estudiar los documentos rectores (programas directores, ejes transversales y líneas directrices de la Matemática), específicamente los objetivos y contenidos que se proponen.
- Determinar los contenidos principales en torno al cual convergen contenidos de las otras asignaturas, programas directores y ejes transversales a partir del trabajo cooperado entre los docentes del colectivo de grado (Alvarado, 2004, p.37).
- ❖ Determinar los nexos a partir de los nodos mediante la aplicación de un corte horizontal ampliado.

Es imprescindible que los docentes dominen los nexos y relaciones que existen entre las disciplinas escolares a partir del conocimiento de los objetivos comunes en la formación de los estudiantes y las potencialidades que brindan los

contenidos para el desarrollo de la personalidad en función de poseer una cultura general integral.

Después de determinar los nodos con el procedimiento anteriormente explicado, deben establecerse estas relaciones, con la utilización de un corte horizontal ampliado, el cual se realiza primeramente dentro de la asignatura Matemática para conocer el orden en que se va a tratar el contenido, tiempo disponible para fijarlo y las habilidades, hábitos y capacidades matemáticas para profundizar y generalizar dicho contenido; de manera que después en un trabajo cooperado en el colectivo del grado se pueda ampliar este corte hacia las relaciones con las demás asignaturas de forma sincrónica sin adelantar contenidos de otras ciencias en la sistematización de los nexos.

El nodo números es un contenido matemático tratado en el octavo grado, a partir del concepto de números racionales. Un corte vertical de este contenido permite afirmar que el mismo se estudia desde grados anteriores a partir del concepto de números naturales y fraccionarios y su representación en el rayo numérico. En el octavo grado se amplía el dominio numérico a los racionales, abarcando los números enteros y los fraccionarios y sus opuestos, los cuales se representan en una recta numérica. Por otra parte, un corte horizontal ampliado de este contenido revela que el mismo se integra y sistematiza en las otras unidades del grado: Trabajo con variables y Geometría.

Este nodo integra las habilidades matemáticas específicas de leer y escribir con los números racionales y la HMG calcular con los números racionales (cálculo porcentual y aproximado); además de otras habilidades como: estimar, convertir, comparar cantidades, longitudes y áreas; recopilar, organizar e interpretar datos y ordenar, representar en la recta numérica y graficar; que debe ser tratado con contenidos de cada asignatura del grado, atendiendo a los contenidos de la educación cubana para lograr los objetivos formativos y en relación con los contenidos de los programas directores.

Esto debe tenerse en cuenta desde la introducción del concepto de números racionales mediante la interpretación y aplicación en la práctica mediante nexos

interdisciplinarios con contenidos de la Geografía, la Biología, la Química, la Física y la Historia: hechos históricos antes y después de nuestra era; las transformaciones del proceso revolucionario en Cuba, a partir de indicadores de salud, educación, deporte, avance científico tecnológico y otros. También con datos sobre la altitud y profundidad de cualquier punto de Cuba para que el estudiante conozca la utilidad de los números racionales a partir de entender el trabajo con los números negativos.

En su preparación metodológica el profesor debe identificar como contenidos convergentes a números racionales: la temperatura de ebullición y fusión; el movimiento rectilíneo uniforme, el movimiento de cuerpos en sentido contrario; la temperatura ambiental, los indicadores de producción material, la ubicación geográfica de puntos de coordenadas en el mapa, el huso de horarios.

Al analizar los nexos interdisciplinarios del nodo números en todos los programas de las asignaturas del grado, el profesor debe comprender que los conceptos, procedimientos, teoremas, habilidades específicas y el significado de su interpretación en este nodo, desde las orientaciones valorativas; permiten integrar en torno a él, otros contenidos del grado con la intencionalidad de los objetivos formativos.

A partir de establecer los nexos interdisciplinarios con el nodo números, el profesor en la planificación, ejecución y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, debe tener en cuenta que los estudiantes se apropian de habilidades generalizadas de la Matemática, del desarrollo del pensamiento lógico, del trabajo docente y métodos de trabajo que integran contenidos de otras asignaturas que reciben en el grado para interpretar los problemas que se presentan en su vida cotidiana en correspondencia con el desarrollo científico-tecnológico del mundo que los rodea.

❖ Concebir tareas docentes interdisciplinarias.

Para el diseño de las tareas docentes interdisciplinarias, el profesor debe partir del diagnóstico de sus estudiantes, de los nexos interdisciplinarios determinados y expresarlo como una intencionalidad en el objetivo. Las potencialidades que

brindan estas tareas deben ser utilizadas para lograr la formación integral del estudiante.

En el diseño de tareas docentes interdisciplinarias las situaciones de aprendizaje que se proponen a los estudiantes deben motivarlos a partir de diferentes actividades, estas deben ser expresadas en tareas concretas y caracterizarse en los diferentes niveles de profundidad por:

- Que sistematicen el trabajo con las asignaturas priorizadas, contenidos de la educación cubana y líneas directrices.
- Que se apliquen de manera coherente las tecnologías de la información y las comunicaciones.
- Que propicien la integración de contenidos de las asignaturas y disciplinas para favorecer la formación de nodos interdisciplinarios.
- Que favorezcan el aprendizaje cooperado entre los estudiantes.
- Que desarrollen habilidades de trabajo con las fuentes.
- Que potencien el desarrollo de habilidades investigativas en los estudiantes (Álvarez, 2001, p.7).

La tarea docente interdisciplinaria en la Matemática se materializa en la solución de ejercicios y problemas como se muestran a continuación, así como se exponen las potencialidades de los mismos.

Ejemplo 1:

En una vivienda tenían 6 bombillos incandescentes y 2 bombillos ahorradores, por lo que se consumía diariamente 400 W. Al sustituir 4 de los bombillos incandescentes por bombillos ahorradores el consumo de electricidad se redujo 160W menos.

- a) ¿Cuántos watts consume cada tipo de esos bombillos?
- b) Explica la importancia del ahorro de electricidad y de combustible.

- c) ¿Por qué la explotación irracional del petróleo causa daños al medio ambiente?
- d) Investiga la cantidad de petróleo que se consume para generar un KW y cuál es el precio de cada barril en el mercado internacional.

Ejemplo 2:

Al quemar diferentes muestras de magnesio en suficiente atmósfera de dióxígeno puro se obtuvieron las masas de óxido de magnesio que aparecen en la tabla siguiente:

E	x	Masa de magnesio	Masa de óxido de magnesio			
1		3	5			
2		4	6	.	6	6
3		5	8	.	3	3
4		6	10			
5		7	1	1	.	66
6		8	1	3	.	33

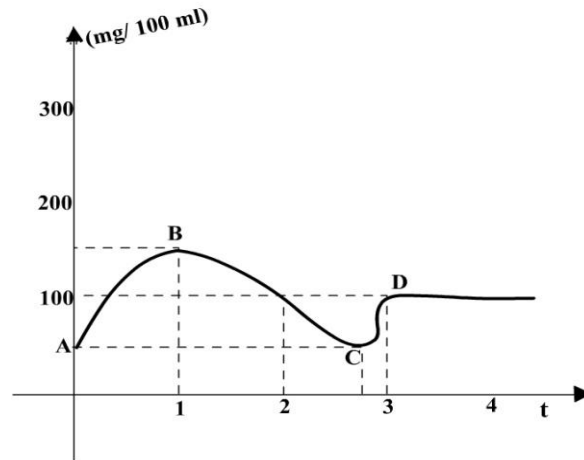
- a) Represente gráficamente este experimento relacionando en el eje X el dióxígeno y en el eje y el magnesio.
- b) Obtenga la ecuación que modela el proceso.

Ejemplo 3:

A continuación, se presenta la curva típica de tolerancia a la glucosa en un individuo normal.

- a) Determine en qué punto el nivel de azúcar sanguíneo alcanza su valor máximo (en cada caso diga el nivel de glucosa en sangre que hay en dichos puntos).

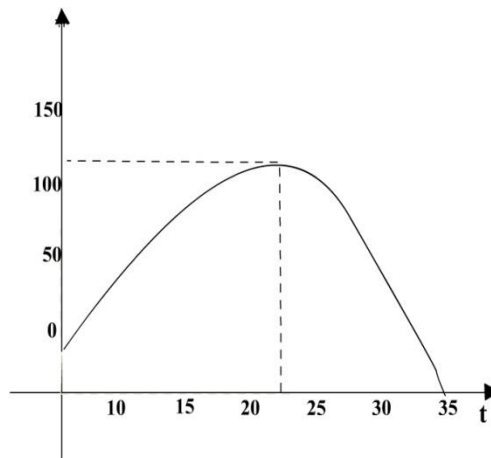
- b) ¿Qué le sucede al nivel de azúcar sanguíneo transcurrido en un tiempo de 4 horas?
- c) ¿Qué le sucede al nivel de azúcar sanguíneo en el tramo $\overline{BC}$?



Ejemplo 4:

El siguiente gráfico muestra la influencia de la temperatura sobre la intensidad de la fotosíntesis con longitud de alta intensidad. Determina:

- a) Punto de mayor intensidad.
- b) Señale el intervalo donde aumenta y disminuye la intensidad de la fotosíntesis.
- c) ¿Qué tiempo tiene que transcurrir para que la intensidad de la fotosíntesis sea cero?



Las potencialidades que brindan las tareas docentes interdisciplinarias anteriormente ejemplificadas son las siguientes:

- Los conceptos y procedimientos matemáticos pueden ser potenciados de manera tal que se le descubra al estudiante que a través de ellos pueden modelar diversos problemas de la vida.
- Se pueden desarrollar las habilidades: observar, describir, modelar, explicar; las HMG calcular, simplificar, evaluar, resolver ecuaciones, relacionar gráficos y propiedades de funciones y resolver problemas.
- El exigir que grafiquen con limpieza y exactitud, así como habituarlos a que trabajen con entusiasmo y tenacidad, individual y colectivamente para lograr un objetivo, contribuye a la formación de valores morales.
- En los problemas planteados el docente puede contribuir a la formación integral potenciando los contenidos de la educación cubana la Educación politécnica, laboral, económica y profesional (Ejemplo 1); la Educación para la salud, la educación física y la sexualidad con enfoque de género (Ejemplo 3) y la Educación ambiental para el desarrollo sostenible (Ejemplo 2 y 4).
- El desarrollo de la autoevaluación y la coevaluación en la búsqueda de la solución de los diferentes ejercicios.

- La formación investigativa al descubrir las diferentes vías de solución de los ejercicios, con la integración de conocimientos y habilidades de varias asignaturas.
- ❖ Seleccionar los métodos y medios teniendo en cuenta los objetivos del programa y los nexos interdisciplinarios precisados.

Los métodos y medios que se seleccionen deben ser aquellos que impliquen al estudiante en su aprendizaje, que propicien el trabajo grupal, y una buena comunicación a partir de la discusión y debate de las tareas que se diseñen, entre los que se destacan:

- Trabajo independiente para resolver ejercicios y problemas que propicien relaciones interdisciplinarias.
- Trabajo grupal, donde se requiera de una cooperación a partir de la complejidad en el problema propuesto.
- Los métodos problémicos (la exposición problémica, heurístico e investigativo) donde se apliquen técnicas de búsqueda y exposición de la información, uso de recursos infotecnológicos y utilización de fuentes bibliográficas en las que se aborden los contenidos con diferentes enfoques.
- La elaboración conjunta, con la utilización de la conversación heurística mediante impulsos didácticos para que reflexionen y descubran por sí mismos relaciones, procedimientos para la resolución de ejercicios y problemas.

Para la evaluación de la efectividad e impacto de las tareas docentes interdisciplinarias diseñadas se debe tener en cuenta los indicadores siguientes:

- La cantidad y complejidad de tareas planteadas y resueltas.
- El número y calidad de los procedimientos y productos desarrollados.
- La motivación alcanzada por los estudiantes con la tarea.

- La eficacia en la discusión, definición, distribución y valoración colectiva de las tareas.
- La cantidad y calidad de fuentes consultadas de áreas diversas (Alvarado, 2004, p.7).

A partir de la teoría abordada en el epígrafe puede concluirse que la clase como vía fundamental para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, constituye el espacio esencial para la interdisciplinariedad en el tratamiento del contenido matemático potenciando la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de conceptos, teoremas, métodos y procedimientos de la Matemática que son necesarios para el estudio y comprensión de hechos, fenómenos, conceptos, leyes y teorías de otras asignaturas que forman parte del desarrollo de la cultura general, por lo que el procedimiento metodológico para el tratamiento interdisciplinario del contenido matemático propuesto puede ser útil a los docentes que imparten la asignatura Matemática para desde la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje favorecer los aprendizajes integradores.

VI. LA SELECCIÓN DE MÉTODOS SEGÚN LA TIPOLOGÍA DE LAS CLASES Y LAS SITUACIONES TÍPICAS DE MATEMÁTICA MEDIANTE ESTILOS DE COMUNICACIÓN ADECUADOS

El método es la vía mediante la cual se organiza la actividad cognoscitiva de los estudiantes bajo la dirección del profesor en el cumplimiento de las metas trazadas, mediante una serie de acciones del profesor que sirven para provocar acciones y operaciones necesarias en los estudiantes, y por tanto, para la conducción efectiva, planificada, y dirigida al objetivo; lo que resalta el marcado carácter bilateral del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el reconocimiento de la estructura del método, en función del objetivo y el contenido, mediante la actividad y medios, tanto del profesor como de los estudiantes, a través de acciones, operaciones y condiciones.

Aunque, “la mayoría de las posiciones pedagógicas considera al método de enseñanza como método de aprendizaje, incluso, algunos autores utilizan la denominación dicotómica método de enseñanza-aprendizaje” (Navarro y Samón 2017, p. 26) para estos autores “el método de enseñanza es la secuencia de acciones, actividades u operaciones del que enseña que expresan la naturaleza de las formas académicas de organización del proceso para el logro de los objetivos de enseñanza” (Navarro y Samón 2017, p. 29) y también redefinen “el concepto de método de aprendizaje como la secuencia de acciones, actividades u operaciones del que aprende para la adquisición y asimilación del contenido de enseñanza con los subsiguientes cambios en su sistema de conocimientos y en su conducta” (Navarro y Samón 2017, p. 29).

Para la autora de este epígrafe, se seguirá utilizando solamente método de enseñanza o simplemente método y se considera que este es un componente dinámico del PEA, que debe contemplar las acciones del profesor que sirven para provocar acciones y operaciones necesarias en los estudiantes para que se comuniquen, se informen, utilicen los medios, las fuentes, desplieguen el lenguaje para sí y para los demás; piensen y desarrollen las habilidades intelectuales o generales, así como las particulares de una asignatura, formen actitudes y valores;

lo que demuestra que el método tiene como esencia la actividad y la comunicación, o sea, ordena y conduce la actividad de profesores y estudiantes a través de la comunicación. Las acciones, actividades u operaciones del que aprende para la adquisición y asimilación del contenido de enseñanza, la autora las considera como estrategias de aprendizaje, que no son objeto de estudio en este trabajo.

Los métodos constituyen un componente fundamental del PEA porque propician cómo lograr la asimilación de conocimientos, el desarrollo de las habilidades y de las orientaciones valorativas a través de la realización de sus diferentes procedimientos, contribuyendo a alcanzar el logro de los objetivos; por lo que, si se determinan bien estos últimos y se selecciona adecuadamente el contenido y los demás componentes del PEA, pero no se utilizan correctamente los métodos, las acciones desarrolladas no tendrán la efectividad necesaria y los resultados tendrán limitaciones.

Diversa es la clasificación de métodos que existen en la literatura. En el texto de Metodología de la Enseñanza de la Matemática I (Ballester, et al., 1992), se hace referencia a una variedad de clasificaciones sobre métodos de enseñanza, que en la práctica no se presentan de forma “pura”, ya que se interrelacionan métodos de acuerdo con los criterios de clasificación que se tenga en cuenta, los que deben combinarse para potenciar el protagonismo de los estudiantes y elevar la calidad del aprendizaje.

En el PEAM se pueden utilizar métodos de acuerdo con la clasificación que aparece en dicho texto, no obstante, se dejan de analizar en este texto la clasificación según las formas de organización, por considerarse, precisamente dichas formas otro componente del PEA, al igual que la clasificación según la fuente de adquisición de los conocimientos, pues esta se refiere a la utilización de medios de enseñanza. Se relacionan a continuación cuatro de las seis clasificaciones que allí aparecen, por ser -a juicio de la autora- los más coherentes al PEAM en la Secundaria básica y en Preuniversitario para el logro de los objetivos de estas educaciones:

1. Métodos lógicos: Método inductivo, deductivo, genético, analítico, sintético.
2. Métodos para la realización de las funciones didácticas: Métodos para la elaboración de la nueva materia, para la motivación, para el control.
3. Métodos según el proceso de comunicación en la enseñanza y el grado de independencia de los estudiantes: Expositivo, elaboración conjunta, trabajo independiente.
4. Métodos según las etapas de desarrollo de la experiencia creadora y la actividad cognoscitiva: Método receptivo de la información, reproductivo, de exposición problemática, de búsqueda parcial o heurístico e investigativo.

Para la selección del método de enseñanza, hay que tener en cuenta el diagnóstico de los estudiantes, sus necesidades, intereses, experiencias, conocimientos previos, grado de madurez en los procesos cognitivos. En el caso de la Matemática, además, deberá analizarse qué métodos son más recomendables para darle tratamiento a la situación típica de que se trate.

Es esencial realizar un análisis exhaustivo de los aspectos del método (Klingberg, 1978), (Labarrere, 1988); uno de ellos es la unidad entre método de enseñanza y proceso de aprendizaje, ya que debe existir unidad dialéctica entre las acciones a desarrollar por el profesor en su condición de dirigente del PEA y las que correspondientemente desarrollan los estudiantes. El profesor selecciona los métodos, pero debe estar dispuesto a variarlos ante las necesidades o las exigencias de sus estudiantes para que se logre un aprendizaje de calidad.

Otros aspectos del método a tener en cuenta son la unidad de lo instructivo y lo educativo, que se concreta en la formación de orientaciones valorativas, actitudes, convicciones ideológicas y normas de conducta en los estudiantes; paralelamente a la apropiación de conocimientos y al desarrollo de habilidades y capacidades en la clase, así como la unidad de lo lógico y lo psicológico que se expresa en una compensación de la doble dependencia del método de las características del contenido de enseñanza, por un lado, y de las particularidades del desarrollo físico y psíquico de los estudiantes, por otro.

No obstante, no se puede olvidar que el desarrollo del pensamiento, de las actitudes y del lenguaje, son aspectos internos, psíquicos del método. El estudiante actúa con su pensamiento y a través del lenguaje (actividad interna), sobre la fuente de información (aspecto externo). Por esta razón puede considerarse que hay aspectos internos y externos del método que se complementan dialécticamente.

Una de las clasificaciones que ha de utilizarse es la basada en el predominio de la actividad de los estudiantes, a partir de ella se puede analizar el aspecto externo del método como modo visible de las relaciones que se establecen entre el profesor, los estudiantes y el contenido; que distingue tres formas metodológicas básicas: exposición del profesor, elaboración conjunta del profesor y de los estudiantes y el trabajo independiente de los estudiantes.

En las clases de introducción al nuevo contenido se puede lograr que el estudiante tenga una participación activa, se implique en el aprendizaje, si el profesor al utilizar el método expositivo para explicar, algoritmos, demostrar las proposiciones, y resolver problemas; propicia no solo que el estudiante pueda tomar notas de ideas centrales de conceptos, teoremas, proposiciones, procedimientos y propiedades, transcribir fórmulas, ejemplos resueltos, elaborar esquemas; sino que facilita la comprensión del estudiante incitándolo a participar en silencio, que le surjan dudas y preguntas sobre la lógica y la autenticidad del procedimiento de solución o demostración que se esté realizando.

En el trabajo independiente predomina el aprendizaje productivo, ya que los estudiantes resuelven ejercicios y problemas con ayuda del libro de texto u otro medio de enseñanza y este método se puede utilizar tanto para consolidar, como para la adquisición de nuevos conocimientos sobre conceptos, teoremas o procedimientos.

En las clases de introducción como en las de consolidación se puede emplear la elaboración conjunta, en la que la actividad del estudiante será receptiva, reproductiva o productiva, de acuerdo con las exigencias que el profesor establezca a través de preguntas, impulsos heurísticos, comentarios y

planteamientos de problemas, mediante el diálogo con el grupo de estudiantes. En la elaboración conjunta, la conversación heurística debe ser amena, mediante impulsos didácticos para que reflexionen, pregunten, descubran por sí mismos relaciones, procedimientos, formulen proposiciones. De esta forma se puede utilizar este método, conjuntamente con el método inductivo-deductivo para el tratamiento de las situaciones típicas relacionadas con los conceptos y sus definiciones y los teoremas y sus demostraciones.

Los métodos problémicos (la exposición problémica, heurístico e investigativo) tienen un lugar predominante para estimular y favorecer la asimilación creadora de los contenidos. La exposición problémica es menos utilizada en la secundaria básica debido a las características psicológicas de los adolescentes, pues requiere de niveles de atención, abstracción e interés superiores; no obstante en la educación preuniversitaria los estudiantes tienen el desarrollo adecuado para comprenderla, se puede emplear en las etapas motivacional y de elaboración de las bases de orientación del nuevo contenido para cualquier situación típica en el proceso de asimilación para establecer con los estudiantes un diálogo mental y familiarizar a los estudiantes con la lógica de la búsqueda de la solución del problema planteado. El método de búsqueda parcial es más empleado para que los estudiantes adquieran dominio de algunas de las etapas del proceso de resolución de problemas y desarrollen sus habilidades investigativas.

Como el método investigativo organiza el proceso problémico de manera que los estudiantes atraviesan independientemente todas o la mayoría de las fases del proceso de investigación, tiene sus limitaciones para utilizarse con los estudiantes de Secundaria Básica, pues tiene como premisas necesarias la experiencia y habilidades para la búsqueda y procesamiento de la información; sin embargo, es factible su utilización en el Preuniversitario.

Se concuerda con (Rizo, 1999) que los métodos problémicos hay que estructurarlos adecuadamente, porque según ella la enseñanza problémica:

Está muy elaborada desde el punto de vista didáctico y tiene un cuerpo categorial muy estructurado. En esta forma de enseñanza poco se deja a la

improvisación, a mí se me parece más a la mayéutica socrática que a la heurística de Polya, aunque tome la forma de heurística en algunas presentaciones. Se supone la forma en que debe proceder el alumno y es como si el hilo conductor del pensamiento del maestro determinara la actividad del estudiante (p.10).

Esos criterios se evidencian en la práctica, si el profesor al planificar las clases de Matemática estructura los métodos problémicos en acciones y operaciones, de acuerdo con los conocimientos que poseen los estudiantes, pero sin tener en cuenta las motivaciones e intereses de estos y, además, al realizarlas limita la diversidad de opiniones y sanciona los errores en vez analizar las causas, entre otras dificultades del estilo de comunicación; en el mejor de los casos, podrá movilizar los procesos del pensamiento para fundamentar la validez de proposiciones matemáticas, entender y realizar demostraciones, comprender la esencia de los conceptos, aplicar la terminología, las simbologías, lenguaje y procedimientos matemáticos; pero como se ha transmitido de forma rígida el contenido a los estudiantes, sin partir de sus vivencias e intereses, sin análisis de diversas ideas de solución, el inadecuado estilo de comunicación utilizado ha restringido las potencialidades de estos métodos y los conocimientos recibidos en la clase tienen pocas posibilidades de que perduren y puedan utilizarse para adquirir otros o para solucionar problemas matemáticos y de la vida, pues para el estudiante lo aprendido no tiene significación empírica, ni afectiva, solo conceptual.

Se considera que para que los métodos sean efectivos deben utilizarse mediante relaciones adecuadas con estilos de comunicación que propicien la clase desarrolladora y elevar los resultados del aprendizaje.

Un aspecto del método que es también debe tenerse en cuenta para su selección es la unidad de lo objetivo y lo subjetivo, que se pone de manifiesto en la dependencia del método a los objetivos y al contenido de enseñanza, así como su relación con los demás componentes y con las condiciones objetivas y subjetivas

del PEA, pero además con el estilo de dirección del profesor, en especial al estilo de comunicación que le permita conducir con acierto la clase y el aprendizaje de los estudiantes.

El método es el componente más dinámico del PEA que influye en los resultados de aprendizaje de los estudiantes y en su formación integral, pero es un error pensar que solo la influencia externa influye en dichos resultados, porque existen las diferencias individuales de cada estudiante, no solo en lo cognitivo sino en lo afectivo; además el aprendizaje es un proceso interactivo, lo que implica reconocer el carácter necesario de la comunicación en el proceso de asimilación del conocimiento. No comprender la relación entre el aprendizaje y la comunicación puede conducir a enfoques conductistas.

Es ineludible plantear que cuando el profesor planifica sus clases de Matemática si no considera que las acciones que van a desarrollar los estudiantes pueden tener variedad de interpretaciones, debido al nivel de conocimientos adquiridos, a las necesidades, motivaciones, entre otras características personales; está siendo consecuente con enfoques conductistas, al utilizar el recurso acción-reacción. Para solucionar estas limitaciones en el PEAM es necesario que también se planifique cómo desarrollar la comunicación adecuada con los estudiantes y que se tenga en cuenta la diversidad de ideas, de respuestas, además que es posible el error, cuáles son las causas y cómo superarlos.

En el PEA, es llamativo el hecho de que seleccionando un mismo método o procedimiento el proceso se desarrolla distinto de un profesor a otro, como efecto de estilos personales diferentes. Estos estilos están dados por sus gustos, motivaciones, experiencias, facilidad en las relaciones interpersonales; así como por las características individuales de la comunicación: tono de voz, ritmo, gestos, empatía; y por los sentimientos, motivaciones, vocación, entre otros elementos de su personalidad.

El contenido del concepto estilo comunicativo refleja el conjunto de fenómenos y procesos de la personalidad como las capacidades y habilidades para el trato interpersonal, la autovaloración, la autorregulación y la motivación. Es importante

conocer sus particularidades en la profesión pedagógica en la cual la comunicación constituye un instrumento vital y una cualidad profesional.

Cada persona posee un estilo de comunicación determinado, que lo peculiariza y matiza sus relaciones con los demás, determinando el nivel de efectividad en su comunicación interpersonal. Se asume la definición de (Ibarra, 2002): “El estilo comunicativo es la forma que la personalidad se orienta al organizar, dirigir y participar en la comunicación con los demás y está relacionada con las características personológicas de cada uno” (p.3) citada por (Breijo, s/a), ya que se adecua más a la labor del profesor el que mediante su estilo de comunicación organiza y dirige no solo su comunicación, sino la de sus estudiantes.

El estilo comunicativo, como resultado de un aprendizaje anterior, está influido por las experiencias pasadas, referidas a frustraciones y éxitos en el trato con otras personas; también adquieren un peso decisivo en la conformación del estilo la concepción del mundo del individuo sobre la sociedad, sobre las demás personas y sobre sí mismo; así como aquellos criterios despreciativos y de subestimación de otros, como complemento de la sobrevaloración de sí, conformarán un estilo diferente de aquellos criterios de respeto y consideración de los que tienen una autovaloración adecuada.

“Se plantean tradicionalmente diferentes estilos en las relaciones profesor-estudiante, como son el democrático, el autoritario, el permisivo, el centrado en la tarea y el centrado en las relaciones “(Linares, 2002, p.107).

El estilo de comunicación democrático se caracteriza por una participación activa de los estudiantes en la toma de decisiones. El profesor tiene en cuenta sus criterios y las relaciones obedecen a una estructura descentralizada. Este estilo no implica la pérdida del control por parte del docente. Que exista camaradería en las relaciones entre el profesor y los estudiantes no significa que ambos sean iguales, ni que desaparezca la importante misión del profesor como dirigente del PEA. El acercamiento afectivo entre el profesor y sus estudiantes favorece la comunicación entre ellos y conduce a una formación adecuada de cualidades, actitudes y valores en la personalidad de los estudiantes. Cuando el estudiante

percibe en el profesor una persona afectuosa, confiable, comprensiva, disciplinada y estable, siente seguridad en su capacidad para entenderlo y apoyarlo.

El estilo autoritario se basa en la autoridad del profesor como figura única en la toma de decisiones. Sus criterios se imponen y no se consultan ni se tienen en cuenta los puntos de vista de los estudiantes. El profesor que utiliza el estilo autoritario se caracteriza por ser estricto en el cumplimiento de la disciplina, de los reglamentos y sanciona sin dar lugar a explicaciones. En sus clases prevalece el regaño, dar una baja nota, la crítica u otras variantes, en vez de reconocer explícitamente ante otros los aciertos.

Los profesores que utilizan estilos de comunicación autoritarios hacen que sus estudiantes aprendan con menor flexibilidad y democratización de sus criterios y conductas, propician inhibiciones para emitir criterios y puntos de vista e inhiben el desarrollo de la individualidad de estos, entorpecen el establecimiento de las relaciones interpersonales en el grupo; el aprendizaje ocurre con mayor predominio de la memorización sobre la reflexión y diálogo entre sus participantes.

En el estilo centrado en la tarea el docente prioriza hasta tal punto el cumplimiento de su tarea, que descuida, o incluso, afecta las relaciones entre las personas que en ella participan. Al estar tan enfocado hacia el trabajo a realizar, no se tienen en cuenta los factores subjetivos que intervienen. Este profesor está tan centrado en los contenidos de su clase, que no se preocupa por un ambiente de hostilidad o tensión que pueda estar afectando al grupo, o por una situación personal que pueda tener un estudiante que no le permite concentrar su atención, o por criterios del grupo acerca de su persona y sus actitudes hacia los estudiantes.

Por otra parte, el estilo centrado en las relaciones implica el priorizar estas en detrimento de la tarea a realizar. En el PEAM se manifiesta cuando el profesor, preocupado por mantener una buena comunicación con sus estudiantes, dedica tanto tiempo a conversar con ellos, a preocuparse por sus intereses o limitaciones, que no le permite cumplir con lo que había planificado; o por no crear una situación de malestar, no sanciona lo mal hecho, no es riguroso en la evaluación y

esto puede conducir a otro estilo más perjudicial que es el permisivo, o “de dejar hacer” lo que implica la pérdida de la autoridad o del control del proceso.

El estilo permisivo, o de "dejar hacer" se manifiesta cuando el profesor, deja hacer lo que quiere al estudiante, es un caso extremo y desordenado de no imposición, que implica la pérdida de su autoridad y del control del proceso. Es necesario distinguir este estilo del democrático, en este último, el profesor deja de tener él solo el papel protagónico y lo comparte con sus estudiantes al favorecer que estos vayan adquiriendo su propio conocimiento, facilitando la expresión de ideas, sentimientos, valoraciones, opiniones y criterios de todos, en un ambiente comunicativo de aceptación y empatía, logrando una combinación tal que se cumplan las tareas sin afectar las relaciones.

El estilo de comunicación se considera adecuado a la situación cuando existe una correspondencia entre los recursos y medios utilizados por la personalidad, y el carácter de las relaciones interpersonales en el grupo, las particularidades psicológicas de los interlocutores y la especificidad y organización de la actividad conjunta (Ortiz, 1996, p. 32).

Un estilo de comunicación adecuado en el PEAM estimula la comprensión, el diálogo, el compromiso personal en la búsqueda de soluciones para los problemas matemáticos y educativos que se les presentan en la vida cotidiana, para lo cual se debe cumplir las funciones informativa, reguladora y afectiva. En el PEA es importante cumplir con la función afectiva, considerando que las relaciones afectivas pueden ayudar al profesor a ejercer una mayor influencia educativa sobre los estudiantes; escucharles, respetar sus puntos de vista, atender a sus problemas, brindarles apoyo cuando lo necesiten, establecer compromisos, favorecen el interés por aprender.

Debe lograrse una combinación tal que el docente pueda garantizar el cumplimiento de las tareas, sin afectar las relaciones y que el estudiante tenga una participación activa, sin que el profesor deje de tener su papel dirigente. Para

lograr esto se deben utilizar métodos y diseñar adecuadamente las tareas docentes a realizar por los estudiantes, tanto en los momentos de ejecución como en los de orientación y control, teniendo en cuenta las características de los estudiantes.

Aunque, ha sido poco reconocida la relación entre los métodos y los estilos de comunicación, se tiene en cuenta las ideas de Álvarez de Zayas (1999), al plantear:

La comunicación profesor-estudiante y de estos entre sí es en el método, la vía para que estos concienticen la necesidad y formen el motivo, desarrollando la actividad que les posibilite interiorizar el objeto, sus propiedades y leyes. Esto se da como un todo único en el así llamado proceso docente-educativo (p.32).

Estudios realizados por un equipo de investigadores guiados por (Torres, 1998) reconocen nueve tendencias didácticas de la Matemática, una de ellas es denominada comunicación matemática, reconoce que la interacción entre el profesor y los estudiantes y entre ellos, no debe ser solo sobre conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos; sino también de las experiencias y vivencias afectivas de los estudiantes.

Se defiende que la utilización de métodos mediante estilos de comunicación inadecuados limita la impartición de clases desarrolladoras y la calidad del aprendizaje, criterio que también emite Ojalvo (1999) cuando expresa: “La concepción de la enseñanza como proceso de interacción entre profesores y estudiantes, el empleo de métodos y formas de enseñanza adecuados para estas relaciones influyen en la calidad del aprendizaje” (p.183).

Los fundamentos teóricos sobre los estilos de comunicación, los métodos de enseñanza en el PEAM; además de los fundamentos metodológicos del PEAM permitieron determinar las siguientes relaciones entre los métodos de enseñanza y los estilos de comunicación en el PEAM (Ledo, 2013).

1. Relación entre la estructuración del método de enseñanza y el método de aprendizaje con el componente interactivo de la comunicación.

Características de esta relación: Teniendo en cuenta el diagnóstico de los estudiantes y el objetivo, para darle tratamiento a los conceptos y sus definiciones, a los teoremas y sus demostraciones, a las construcciones geométricas, así como a los ejercicios con texto y problemas; el profesor utiliza métodos que propician el intercambio y la reflexión mediante relaciones de cooperación (anima, ayuda oportunamente, pide opiniones, hace sugerencias), de acuerdo (escucha y respeta la diversidad de criterios) y de distensión (busca disminuir la tensión, expresa sus deseos, sus sentimientos, bromea, elogia los éxitos).

2. Relación entre las funciones de la comunicación y el aspecto lógico-psicológico del método.

Características de esta relación: Utilización de métodos para la apropiación de conceptos, proposiciones y procedimientos, que permitan la relación entre los nuevos conocimientos con los que ya poseen los estudiantes, con sus intereses, motivos, con el entorno; en el que los impulsos didácticos provoquen la búsqueda de varias vías de solución, el planteamiento de interrogantes y la argumentación de puntos de vista; lo que propiciará la expresión de emociones, estados de ánimo y sentimientos, y el análisis de las causas por los errores.

3. Relación entre el estilo de comunicación y el aspecto externo del método.

Características de esta relación: Empleo de métodos y de un estilo de comunicación democrático que posibilite utilizar formas de trabajo y de pensamiento en la Matemática como son: variación de condiciones, búsqueda de relaciones y consideraciones de analogía para definir conceptos, formular proposiciones y resolver problemas; en el que los estudiantes puedan emitir criterios sobre: las vías de solución de ejercicios y problemas, cómo se les ha transmitido este contenido, para qué, con qué; además se tienen en cuenta sus criterios y el de sus compañeros en el diseño de acciones para elevar el aprendizaje y perfeccionar el proceder del profesor.

4. Relación entre los estilos de la comunicación y el aspecto interno del método.

Características de esta relación: Utilización de métodos mediante procedimientos heurísticos como los principios de analogía, reducción, inducción y generalización, entre otros, así como las reglas y las estrategias heurísticas con un estilo de comunicación democrático, en el que las preguntas e impulsos didácticos impliquen la necesidad de analizar, sintetizar, abstraerse, comparar, identificar, ejemplificar, clasificar, definir y generalizar conceptos, además de transformar juicios y demostrar proposiciones matemáticas, entre otras operaciones lógicas.

5. Relación entre los estilos de la comunicación y el aspecto instructivo-educativo del método.

Características de esta relación: Empleo de métodos y el estilo de comunicación democrático mediante la problematización del contenido, creando contradicciones tanto para encontrar las vías de solución como para debatir en la resolución de problemas, las situaciones que aparecen en estos relacionados con: la vida y el desarrollo político, económico y social del país y del mundo, los fenómenos y procesos científicos, ambientales y estéticos, y con sus intereses y necesidades.

6. Relación entre los estilos de la comunicación y el aspecto objetivo-subjetivo del método.

Características de esta relación: Utilización de un estilo de comunicación democrático que propicia el cumplimiento de los objetivos y el dominio del contenido mediante una secuencia de acciones que profesores y estudiantes desarrollan con medios de enseñanza y formas organizativas que combinan el trabajo individual y el grupal, en interacción para la búsqueda de significados y la motivación por aprender. Mediante el diálogo, la reflexión, los estudiantes asumen criterios propios, llegan a conclusiones sobre las relaciones encontradas entre los conceptos, propiedades y procedimientos estudiados y la búsqueda de las vías de solución.

Se considera que el método contribuye a elevar la calidad del PEAM para la aplicación integrada del contenido si se utiliza mediante un estilo de comunicación

que propicie que los estudiantes realicen un esfuerzo intelectual que demande reflexionar, elaborar conjeturas, establecer nexos, relaciones, llegar a rasgos de esencia y a conclusiones con un adecuado desarrollo del pensamiento lógico y facilite la expresión de ideas, sentimientos, valoraciones, opiniones y criterios de todos, en un clima comunicativo de aceptación y empatía teniendo en cuenta las necesidades, intereses y motivos de los estudiantes; para que realicen con independencia y conscientemente las tareas docentes y descubran por sí mismos relaciones, procedimientos, formulen proposiciones y determinados problemas matemáticos como fundamentar, definir y explicar relaciones, entre otras.

La integración sistémica de los componentes personales y personalizados del PEAM y su carácter desarrollador, que tiene su punto de partida en el diagnóstico integral y en los objetivos formativos, la integración sistemática del contenido y la utilización adecuada de métodos mediante la relación adecuada con los estilos de comunicación, medios, formas organizativas y la evaluación son elementos esenciales para impartir clases desarrolladoras y elevar los resultados del aprendizaje de los estudiantes.

Para el cumplimiento de los objetivos de la Matemática en la educación Secundaria básica y Preuniversitaria, los métodos de la enseñanza problémica y la resolución de problemas requieren de la utilización de procedimientos heurísticos (Figura 1) y los procedimientos heurísticos esenciales para cada situación típica (Torres, 1993), así como de los procedimientos lógicos asociados a conceptos, juicios y razonamientos (aparecen en las páginas siguientes); que les permitan analizar y extraer conclusiones, sobre todo de carácter ideológico y político, de la información sistemática acerca de la situación actual de Cuba y del mundo sobre problemas de la ciencia, tecnología, sociedad y el medio ambiente.

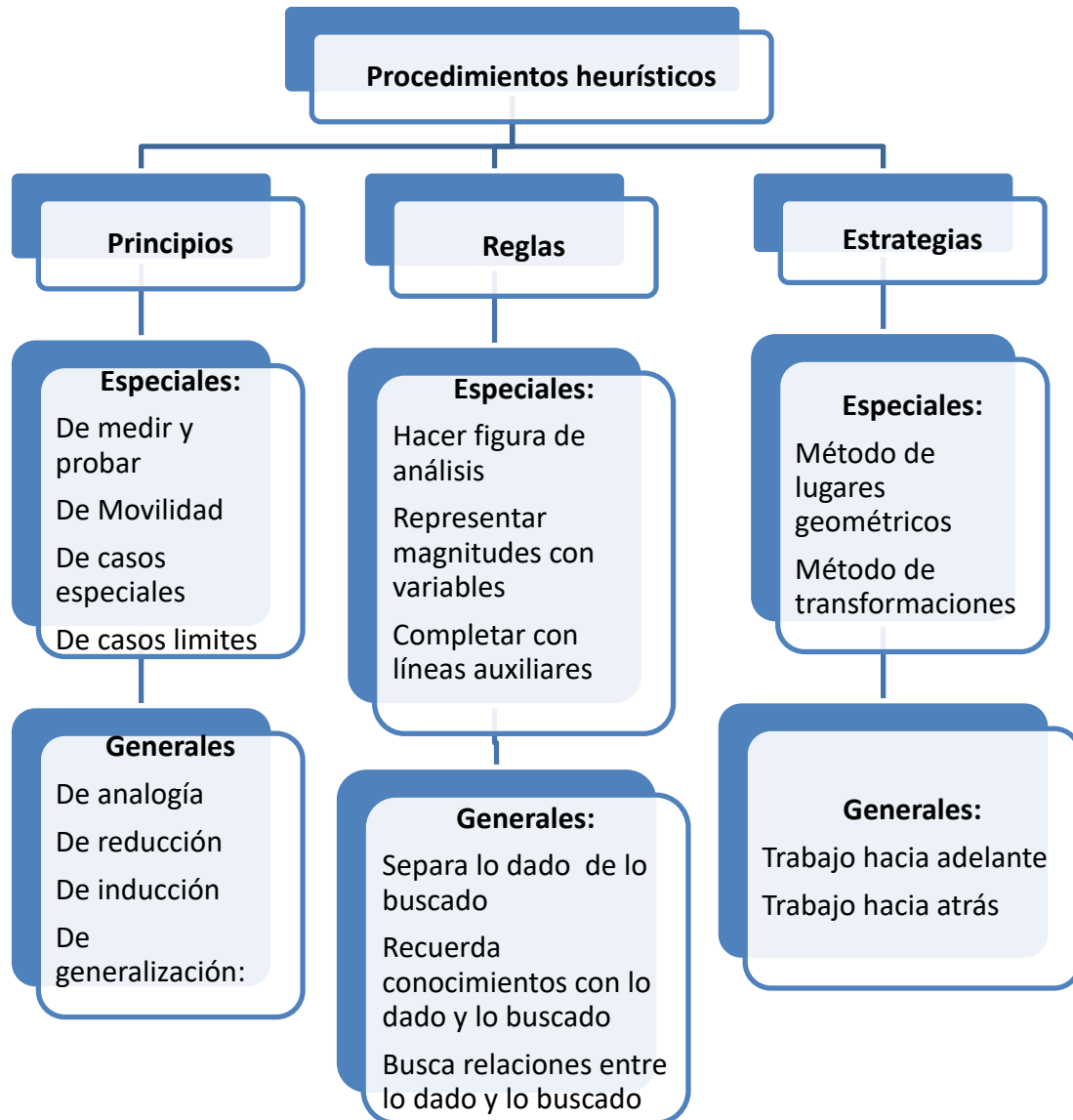


Figura 1: Procedimientos heurísticos

Procedimientos lógicos asociados a conceptos, juicios y razonamientos.

Procedimientos lógicos asociados a conceptos:

- Identificar un concepto
- Ejemplificar un concepto
- Limitar un concepto (generalizar un concepto)
- Deducir propiedades

- Comparar
- Clasificar
- Definir (mediante el género próximo y la diferencia específica)

Procedimientos lógicos asociados a juicios:

- Determinar el valor veritativo de un juicio
- Transformar un juicio (en otro semánticamente equivalente)
- Modificar juicios

Procedimientos lógicos asociados a razonamientos:

- Demostración
- Refutación

Procedimientos heurísticos esenciales para el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática (Torres, 1993):

Procedimientos heurísticos esenciales para la formación de conceptos y sus definiciones:

- Determinación de las características comunes y no comunes.
- Generalización a partir de casos particulares.
- Búsqueda de relaciones y dependencias.

Procedimientos heurísticos esenciales para la obtención de teoremas (proposiciones):

- Medir y comparar sistemáticamente.
- Generalización a partir de casos particulares.
- Establecimiento de consideraciones de analogía.
- Inversión de la problemática.

Procedimientos heurísticos esenciales para el trabajo con demostraciones:

- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.

- Sustituir el concepto por su definición.
- Trabajo hacia adelante.
- Trabajo hacia atrás.

Procedimientos heurísticos esenciales para la elaboración de sistema de indicaciones con carácter algorítmico:

- Analizar qué acciones de identificación o transformación es necesario realizar para alcanzar el objetivo deseado y valora si se han diferenciado todos los casos posibles.
- Generalización a partir de casos particulares

Procedimientos heurísticos esenciales para la resolución de ejercicios con texto:

- Representar las relaciones contenidas en el texto del problema.
- Determinar si se tienen fórmulas adecuadas o es necesario elaborar una ecuación (o inecuación o sistema de ecuaciones).

Procedimientos heurísticos esenciales para la realización de ejercicios de construcciones geométricas:

- Método de lugares geométricos.
- Método de transformaciones geométricas.
- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Sustituir los conceptos por sus definiciones.

Teniendo en cuenta la relación entre los métodos y los estilos de comunicación en el PEAM se ofrecen los siguientes procedimientos que el profesor y los estudiantes deberán realizar en el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática mediante los procedimientos heurísticos y los asociados a conceptos, juicios y razonamientos (Ledo, 2013).

Procedimientos para el tratamiento a conceptos y sus definiciones con el método de elaboración conjunta por la vía inductiva:

1. Fase: Consideraciones y ejercicios preparatorios:

➤ Procedimientos del profesor

- Propone que planteen situaciones de la vida donde han utilizado el concepto.
- Propone que identifiquen las características estudiadas sobre el concepto.

➤ Procedimientos del estudiante

- Plantea cómo ha utilizado el concepto en su vida diaria o en el aprendizaje.
- Identifica las características que conoce sobre el concepto.

2. Fase: Formación del concepto

Paso 1: Aseguramiento del nivel de partida

➤ Procedimientos del profesor

- Realiza preguntas para recordar conceptos subordinados, subordinantes, cruzados o idénticos con el concepto a estudiar, atendiendo al contenido de estos.
- Explica conceptos, procedimientos heurísticos o asociados a estos que sean necesarios para poder definir el concepto.

➤ Procedimientos del estudiante

- Analiza las características de los conceptos y determina sus relaciones.
- Recuerda cómo utilizar los principios, reglas o estrategias heurísticas y los procedimientos asociados a conceptos para llegar a definirlo.

Paso 2: Motivación y orientación hacia el objetivo

➤ Procedimientos del profesor

- Propone una situación problemática intra o extramatemática en la que se necesite definir el concepto para su solución.

- Explica la necesidad de determinar las características esenciales que permitan definir el concepto sin equivocación.
- Orienta qué concepto se definirá (objeto, relación u operación), qué método se utilizará, los procedimientos heurísticos o lógicos asociados a conceptos que pueden utilizar, por qué y para qué es necesario definirlo y que pueden sugerir cómo realizar el proceso de formación del concepto de forma más efectiva.

➤ Procedimientos del estudiante

- Emite juicios sobre la necesidad de lograr el objetivo y los procedimientos para lograrlo.
- Propone si debe realizar alguna adecuación en los procedimientos para el logro del objetivo.

Paso 3: Pone a disposición representantes y no representantes del concepto.

➤ Procedimientos del profesor

- Muestra representantes y no representantes del concepto.

➤ Procedimientos del estudiante

- Observa los objetos mostrados.

Paso 4: Análisis de los objetos respecto a las características comunes y no comunes.

➤ Procedimientos del profesor

- Propone utilizar principios de analogía para analizar características comunes o no de los objetos analizados, y los motiva a la diversidad y respeto de criterios.

➤ Procedimientos del estudiante

- Establece nexos y diferencias entre los representantes o no del concepto.

- Plantea suposiciones, discrepa sobre características comunes o no comunes.

Paso 5: Establecer un sistema de características necesarias y suficientes.

➤ Procedimientos del profesor

- Propone que planteen las características esenciales del concepto y den los argumentos.
- Propicia que se autocorrijan, pide opiniones para el análisis de los errores y hace sugerencias.

➤ Procedimientos del estudiante

- Emite criterios sobre la suficiencia o no de las características.
- Llega a conclusiones sobre las características esenciales del concepto.
- Da argumentos sobre sus conclusiones y se autocorriga si comete errores.

Paso 6: Formulación de la definición o explicación.

➤ Procedimientos del profesor

- Propone utilizar el principio de generalización y que formulen la definición.
- Propone identificar otros representantes del concepto.
- Propone ordenen el concepto en un sistema de conceptos.

➤ Procedimientos del estudiante

- Formula la definición.
- Identifica representantes del concepto.
- Ordena el concepto con relaciones entre este y otros conceptos subordinantes o subordinados mediante la comparación o clasificación, entre otros procedimientos lógicos asociados a conceptos.

Procedimientos para la asimilación o fijación de conceptos y sus definiciones con el método de búsqueda parcial:

➤ Procedimientos del profesor

- Propone ejercicios para identificar, realizar y/o aplicar el concepto que requieran de la búsqueda y fundamentación de varias vías de solución a través de los procedimientos lógicos asociados a conceptos.
- Propicia la variación de condiciones y el debate de las vías.
- Propicia que se autocorrijan, pide opiniones para el análisis de los errores y hace sugerencias.
- Propicia la relación de los conceptos con situaciones del entorno de los estudiantes.
- Solicita que le ofrezcan situaciones de la vida práctica relacionadas con el concepto para ser resueltas en las clases.
- Propone elaboren tablas, esquemas, resúmenes, ejercicios y problemas, analicen casos especiales y extremos, contrapongan y ordenen los conceptos estudiados para su fijación.

➤ Procedimientos del estudiante

- Analiza para determinar las vías de solución (identifica, ejemplifica, limita, generaliza, compara, o clasifica el concepto)
- Realiza suposiciones, discrepa, plantea las vías y las fundamenta; se autocorriga si comete errores y opina para que sus compañeros lo hagan.
- Identifica cómo el concepto se puede relacionar con su entorno y establece nexos.
- Se comprometen a proponer o proponen situaciones de la vida práctica relacionadas con el concepto para darle solución en las clases.
- Trae representantes del concepto o propone.

- Limita, generaliza, clasifica, compara el concepto con otros (subordinante o subordinado) para análisis de casos especiales y extremos, esquematizar, contraponer y ordenar.

Procedimientos para el tratamiento a teoremas y sus demostraciones según los procesos parciales, con el método de exposición problémica y los pasos de la vía deductiva.

Proceso 1: Búsqueda del teorema

➤ Procedimientos del profesor

- Propone una situación problémica que conlleve a la necesidad de la búsqueda del nuevo conocimiento.
- Propone utilizar principios de analogía, medir y probar, formular recíprocos de teoremas.
- Enuncia el teorema.

➤ Procedimientos del estudiante

- Emite juicios sobre la necesidad de conocer la nueva proposición (teorema, propiedad, relación)
- Pregunta si no sabe utilizar los procedimientos heurísticos.
- Establece relaciones entre proposiciones que conoce para intentar elaborar la nueva proposición.

Proceso 2: Búsqueda de la demostración.

➤ Procedimientos del profesor

- Explica la necesidad de la demostración por errores de medición, existencia de recíprocos falsos de proposiciones verdaderas o formulación de proposiciones universales con análisis solo de casos especiales y la exigencia o no del programa de la asignatura de realizarla.

- Propone utilizar (proposiciones) propiedades, axiomas, teoremas y procedimientos heurísticos para realizar la demostración de forma directa o de forma indirecta por reducción al absurdo o por contraejemplos.
- Los motiva a la diversidad y respeto de criterios.
- Propicia que se autocorrijan, pide opiniones para el análisis de los errores y hace sugerencias.

➤ Procedimientos del estudiante

- Plantea suposiciones mediante mediciones, consideraciones de analogía, cálculo o comparación de magnitudes y formación de recíprocos.
- Plantea la necesidad de la demostración.
- Hace inferencias, propone proposiciones y argumentos para llegar a la veracidad de la tesis, mediante analogías con demostraciones anteriores, la diferenciación de casos y reglas heurísticas, o busca ejemplos que no cumplan con la tesis o utilizan la reducción al absurdo.
- Se autocorriges si comete errores y opina para que sus compañeros lo hagan.

Procedimientos para la asimilación o fijación de teoremas y sus demostraciones con el método de trabajo independiente:

➤ Procedimientos del profesor

- Propone proposiciones sobre teoremas y propiedades para determinar el valor veritativo y fundamentarlo.
- Propone proposiciones para que realicen demostraciones de forma directa o indirecta.
- Sugiere reformulen, determinar recíprocos, contraponer teoremas.
- Propicia la variación de condiciones y el debate de las vías.

- Propicia que se autocorrijan, pide opiniones para el análisis de los errores y hace sugerencias.
- Propone situaciones problémicas relacionadas con el entorno de los estudiantes para que se utilicen los teoremas estudiados en su solución.
- Solicita que le ofrezcan situaciones de la vida práctica relacionadas con el teorema para ser resueltas en las clases.
- Propone elaboren tablas, esquemas, resúmenes, ejercicios y problemas, busquen otras formulaciones, y ordenen los teoremas estudiados para su fijación.

➤ Procedimientos del estudiante

- Determina y fundamenta el valor veritativo de proposiciones.
- Realiza demostraciones, para lo cual: analiza premisas y tesis, contrapone teoremas, utiliza inferencias, propiedades, axiomas, teoremas, formula recíprocos.
- Propone situaciones de la vida práctica relacionadas con el concepto para darle solución en las clases.
- Transforma o modifica proposiciones para la búsqueda de otras formulaciones, esquematizar, y ordenar los teoremas estudiados.

Procedimientos para el tratamiento a los ejercicios con texto y problemas teniendo en cuenta las fases fundamentales y las tareas principales del programa heurístico general:

1. Fase: Orientación hacia el problema

➤ Procedimientos del profesor

- Explica la necesidad de resolver el problema para la fijación de conceptos, proposiciones o procedimientos estudiados, contribuir a su desarrollo intelectual o a su formación integral.
- Plantea el problema.

- Propone la lectura y comprensión del problema utilizando los principios de analogía y de reducción, así como las reglas heurísticas.
 - Sugiere establezcan nexos y relaciones entre los conceptos o proposiciones dados o buscados.
- Procedimientos del estudiante
- Interpreta o busca el significado de palabras claves.
 - Separa lo dado de lo buscado y los relaciona.
 - Busca analogías con otros problemas resueltos.
 - Separa el problema en problemas parciales.
 - Formula preguntas, hace suposiciones.
2. Fase: Trabajo con el problema
- Procedimientos del profesor
- Propone la búsqueda de varias vías de solución.
 - Propicia el debate de las vías y la determinación de la vía más racional.
 - Respeta la diversidad de criterios.
 - Pide opiniones para el análisis de los errores.
- Propicia que se autocorrijan.
- Da nuevos impulsos, sugerencias para utilizar las estrategias de trabajo hacia atrás, movilidad.
- Procedimientos del estudiante
- Representa las relaciones contenidas en el problema en figuras de análisis, con variables, modelos, gráficos, tablas.
 - Determina un plan de solución (vías de solución) por cálculo numérico, fórmulas, ecuaciones, gráficamente, métodos de lugares geométricos o transformaciones.

- Elige la vía más racional por análisis personal y criterio de otros estudiantes.

3. Fase: Solución de problema.

➤ Procedimientos del profesor

- Propone ejecuten el plan de solución
- Propone que fundamenten cada paso y representen la solución.

➤ Procedimientos del estudiante

- Calcula, resuelve ecuaciones, grafica, realiza la construcción geométrica.
- Fundamenta con conceptos, proposiciones o algoritmos cada paso.

4 Fase: Evaluación de la solución y la vía.

➤ Procedimientos del profesor

- Propone comprobar si es compatible el resultado obtenido con el texto del problema y el análisis de otras vías.
- Propone generalizar la vía más racional y sugiere que expliquen cómo puede utilizarse en otros problemas.

➤ Procedimientos del estudiante.

- Comprueba si existe contradicción con las relaciones que se dan en el texto del problema.
- Analiza el procedimiento utilizado por otras vías y su solución.
- Elabora un esquema sobre la vía y las condiciones para ser utilizada.

Estos procedimientos para el PEAM permiten diseñar e impartir clases desarrolladoras, que se potencie la integración de contenidos y elevar el aprendizaje de los estudiantes; esto implica que el profesor los oriente sobre cuáles procedimientos heurísticos o asociados a conceptos, juicios y razonamientos pueden utilizar y estos busquen las vías de solución de forma reflexiva, lo que requiere lograr una buena comunicación profesor-estudiante y estudiante-

estudiante para estimularlos a aprender, valorar y ajustar metas; escucharles, respetar sus puntos de vista, sus diferencias individuales, establecer compromisos; partiendo del diagnóstico los estudiantes y todos los componentes propicien la integración sistemática del contenido para elevar la calidad del aprendizaje.

VII. LA ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

La Matemática dota al individuo de herramientas necesarias para afrontar diferentes situaciones de la vida cotidiana, desde una simple comparación de cantidades de magnitudes hasta la aplicación de sus métodos en los más complejos adelantos de la ciencia y la técnica, de ahí la importancia que se le concede a esta una asignatura, sin embargo, es considerada de difícil aprendizaje, manifestado en que tradicionalmente una buena parte de los estudiantes califican de bajo aprovechamiento, es decir, en ella se acentúa la diferencia del desarrollo alcanzado por los estudiantes, condicionado por el desigual ritmo de aprendizaje que tiene cada uno de ellos y las deficiencias en la atención a las diferencias individuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

En tal sentido actualmente se enfatiza y se ha convertido en un principio pedagógico, el reconocimiento de que todos los estudiantes pueden aprender y desarrollarse, aunque cada uno de ellos es distinto, tiene su propio ritmo de aprendizaje, sus capacidades y necesidades propias y específicas, por lo que se impone la necesidad de ofrecer un adecuado tratamiento a las diferencias individuales para que en el PEA de cualquier asignatura o disciplina todos logren el objetivo propuesto, pero es sabido que esto constituye un problema a resolver, revelado en las múltiples deficiencias que se manifiestan en la dirección del aprendizaje de los estudiantes.

Desde edades tempranas existen problemas docentes que requieren ir trabajando con los estudiantes para el vencimiento de los objetivos propuestos en cada nivel, según Arango (1992) “En la Matemática son causas de esta situación:

- Diferencias en el nivel de abstracción de cada estudiante, y el alto grado de abstracción de la Matemática.
- Diferencias en el proceso de asimilación y fijación para cada alumno” (p. 211).

El profesor desempeña un rol decisivo, no solo para que los estudiantes puedan asimilar, sino en la motivación y orientación de la actividad que permita que el

estudiante reflexione y cree una disposición activa ante las tareas que se le asigne.

La atención a las diferencias individuales como principio didáctico constituye una herramienta de trabajo de todo aquel que dedique su actividad profesional a la instrucción y educación de sujetos de aprendizaje. Ello requiere de la realización de un diagnóstico integral en el cual se integre el aprendizaje y la formación armónica de la personalidad. Solo bajo esta condición el profesor puede asegurar las condiciones pedagógicas y psicológicas que garantice el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje con la calidad requerida.

El principio de atención a las diferencias individuales se fundamenta en la regularidad de la interrelación de lo colectivo con lo individual, reconoce la necesidad de educar a los estudiantes en el colectivo y para el colectivo, sin perder de vista la atención a sus diferencias individuales.

El profesor debe conocer integralmente a cada uno de sus estudiantes: sus dificultades, intereses, pues sin este conocimiento no es posible realizar ningún trabajo individual; se debe prever las distintas formas de atención a las particularidades individuales, tales como trabajos independientes, consultas, formulación de preguntas en la clase, entre otros. Este principio está íntimamente vinculado con la triada presente en el PEA: personalidad, actividad y comunicación.

Estos tres elementos conforman una unidad indisoluble en dicho proceso que se encuentran en constante interacción y tiene como centro al estudiante. De ahí que dicha unidad esté matizada por el principio de atención a las diferencias individuales debido a que el estudiante conforma una personalidad, realiza algún tipo de actividad e interactúa lingüística o extralingüísticamente con uno u otro compañero, con un grupo o con el docente. El profesor debe jugar un papel importantísimo para lograr que la interacción del educando con el resto del colectivo se efectúe sobre la base de buscar la vía para que ese estudiante se inserte en el grupo e interactúe con el resto de sus compañeros en las actividades que se desarrollen en el colectivo.

La atención a las diferencias individuales exige la orientación de actividades docentes que respondan a las necesidades de aprendizaje de cada estudiante, a partir de sus características. En este sentido reviste importancia el trabajo individual para alcanzar un mínimo de homogeneidad en el grupo para que este avance como tal, y todos los estudiantes progresen en función de los objetivos de la asignatura, así como concebir adecuadamente el PEA donde todos tengan la posibilidad de elevar su aprendizaje a niveles superiores, o sea concebir este proceso diferenciador, para ello es fundamental el diseño del trabajo diferenciado en las actividades que se le proponen a todo el colectivo de estudiante.

Generalmente los docentes realizan trabajo individual con los estudiantes, sobre todo con los que tienen dificultades, atendiéndolos de forma independiente en consultas, apadrinamientos, orientándoles guías de estudio y proporcionándoles niveles de ayuda, pero esto no es suficiente para lograr un aprendizaje desarrollador en cada estudiante, se considera que el trabajo diferenciado debe realizarse desde la clase donde se implique al colectivo de estudiante y una manera de diseñarlo es a través de la tarea docente.

La clase es el escenario por excelencia donde se adquieren conocimientos y se desarrollan hábitos, habilidades y capacidades, por lo que la aplicación de los principios didácticos debe convertirse en una obligación y necesidad para los docentes a fin de dirigir el PEA de modo que satisfaga el aprendizaje individual y colectivo, favoreciendo el desarrollo de los educandos.

Tareas para la atención a las diferencias individuales desde una concepción integradora en el PEAM.

El profesor después de identificar el rendimiento de los estudiantes a través del diagnóstico puede dirigir las tareas de aprendizaje a tres grupos tipos de estudiantes: estudiantes de bajo o lento rendimiento en el aprendizaje; estudiantes de rendimiento promedio y estudiantes de alto rendimiento en el aprendizaje. En este sentido la concepción y formulación de la tarea docente es la vía por excelencia para materializar el trabajo diferenciado, porque es en ella donde se concretan las acciones que para aprender ha de realizar cada educando.

Las tareas docentes concretan el desarrollo sistemático del estudiante al constituir la estructura didáctica básica en que se desarrolla la clase. Las tareas conforman un sistema y cada una debe revelar el objetivo, el contenido y las condiciones de su realización, en dependencia de la base orientadora de la acción que necesite el estudiante individualmente de acuerdo a su nivel de independencia y deben garantizar la aplicación del contenido en sus diversas interrelaciones (intra-materia, inter-materia y en su contextualización” (Pla, 2012, p. 61).

Se propone el siguiente procedimiento metodológico para elaborar la tarea docente:

I. Concepción:

- Resultados del diagnóstico individual y grupal.
- Derivar del objetivo formativo el del sistema de la clase.
- Formular el objetivo de la clase.
- Formulación de la tarea.

II. Orientación:

- Determinar la base de la orientación para la acción (B.O.A)

III. Control de la tarea

La formulación de la tarea plantea determinadas exigencias al estudiante, estas deberán responder a los tres niveles de asimilación (reproductivo, de aplicación y de creación). Al planificar sus clases, el docente deberá tener en cuenta este aspecto con el fin de producir un desarrollo superior en el estudiante, toda vez que éste haya asimilado la esencia de los conceptos y habilidades, como parte de la realización de las tareas que se derivan de las exigencias previstas en la formulación de los objetivos.

El estudiante que no tiene una buena orientación para evaluar objetivamente cuánto ha avanzado y cuánto le falta en el aprendizaje no toma conciencia de la necesidad de proponerse metas superiores. En esta dirección es necesario garantizar que el estudiante disponga de recursos que le permitan valorar sus avances en el cumplimiento del objetivo y lo que aún le falta para alcanzar niveles cualitativamente superiores, es decir que él se encuentre correctamente orientado hacia el objetivo.

El control y evaluación del sistema de tareas docentes se debe realizar sistemáticamente, mediante el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática durante las clases en preguntas escritas, orales, evaluaciones parciales y finales, concursos de conocimientos, estudio independiente, la autoevaluación así como la participación activa de los estudiantes en el transcurso de cada tarea, para determinar los avances individuales de cada estudiante y planificar nuevas tareas docentes a partir de las deficiencias detectadas.

En el PEA de la Matemática, la tarea docente que predomina es la resolución de ejercicios y problemas, puesto que constituye una vía fundamental para realizar la enseñanza de la misma y constituye el medio principal para el cumplimiento de los objetivos. Es por ello que los profesores deben conocer formas efectivas de potenciar al máximo las posibilidades que estos brindan para contribuir al mantenimiento y desarrollo de habilidades y hábitos; al desarrollo del pensamiento y a la educación ideológica de los estudiantes, una de esas formas es organizándolos en sistemas o bloques, caracterizados por ser variados, diferenciados y suficientes. La variedad está dada por las diferentes formas de presentar los ejercicios y problemas, la suficiencia en la presencia de todos los contenidos del tema y el carácter diferenciado en la gradación de los ejercicios y problemas según la profundidad del contenido para la aplicación integrada del contenido estudiado de manera variada (conocimientos, habilidades generalizadas y del pensamiento lógico), es decir los ejercicios deben ser cada vez más integradores.

La propia estructura del bloque de ejercicios en correspondencia con las diferentes

exigencias con la cantidad y calidad de la labor realizada le permite a cada estudiante descubrir la necesidad de un aprendizaje cualitativamente superior al alcanzado.

Se debe propiciar que el estudiante utilice diferentes vías para controlar la calidad de los resultados de su trabajo: comparación de estos con los de sus compañeros, con los ofrecidos por el profesor, con los dados en los textos; comprobaciones en caso de ser posible (solución de ecuaciones, cálculos); sentido lógico de la solución, por ejemplo una solución negativa para la velocidad o para el área de una figura, un número fraccionario o decimal como solución cuando esta debe ser un número natural (cantidad de estudiantes, de sillas). Se debe enfatizar más en la necesidad de identificar las causas de los errores que en ellos en sí para que se tome conciencia que tan importante como el resultado es el proceso utilizado para llegar a él.

Es importante tener el diagnóstico del nivel de desempeño de los estudiantes para seleccionar con eficiencia los ejercicios y problemas que son efectivos para llevarlos a niveles superiores de desarrollo. En Matemática se evalúa el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes de acuerdo a su desempeño a partir de los siguientes niveles:

Nivel I: En este nivel se consideran los estudiantes que son capaces de resolver ejercicios formales eminentemente reproductivos, es decir, que miden los conocimientos y habilidades que conforman la base para la comprensión de la Matemática.

Nivel II: Contempla aquellos estudiantes que pueden resolver ejercicios en los que se requiere utilizar los conocimientos y procedimientos con alguna transformación, sin llegar a enfrentarse a una situación en la que no se conoce la vía de solución, como en el caso de los llamados problemas rutinarios. Este nivel constituye un primer paso en el desarrollo de la capacidad para aplicar estructuras matemáticas a la resolución de problemas.

Nivel III: A este nivel se encuentran los estudiantes que son capaces de resolver problemas propiamente dichos. En este nivel los estudiantes son capaces de reconocer estructuras matemáticas complejas y de usar estrategias, razonamientos y procedimientos que exigen poner en juego los contenidos matemáticos.

En cada complejo de materia siguiendo la esencia planteada para cada nivel de desempeño debe adaptarse a sus particularidades, por ejemplo, (Uralde, 2010) propone para la unidad de Geometría Plana del décimo grado la siguiente adecuación:

Nivel I:

- Identificar propiedades y relaciones de figuras geométricas.
- Definir propiedades y relaciones de figuras geométricas.
- Esbozar figuras planas atendiendo a sus propiedades.
- Realizar cálculos donde solo tengan que hacer sustituciones en relaciones o fórmulas sencillas.

Nivel II:

- Demostrar proposiciones geométricas donde se apliquen los criterios de igualdad y semejanza de triángulos en los que no haya más de un elemento oculto.
- Calcular elementos asociados a las figuras planas utilizando las propiedades de los elementos homólogos en figuras iguales y semejantes.
- Calcular empleando diferentes fórmulas donde pueden intervenir hasta dos relaciones para su realización y la aplicación a situaciones sencillas de la práctica.

Nivel III:

- Resolver problemas de cálculo, demostración y de aplicación práctica donde intervengan de manera integrada los contenidos estudiados.

Dado el número de estudiantes que conforman el grupo clase de la escuela media; su heterogeneidad en los rasgos de la personalidad, tales como las aptitudes, habilidades y conocimientos; la utilización de formas organizativas tradicional en el proceso, en la mayoría de las ocasiones, no permite lograr la comunicación con la totalidad de los estudiantes para orientar, controlar y evaluar así, el comportamiento de su aprendizaje.

De las afirmaciones anteriores se infiere que para lograr interactuar con todos los estudiantes del grupo clase, garantizando la atención máxima a cada uno de ellos, el trabajo en grupos de estudiantes o equipos brinda elevadas oportunidades.

En el PEA de la Matemática el trabajo en equipos o grupos de estudiantes se utiliza cuando: “Deben hacerse ejercicios más difíciles, más complejos o cuando en la fase de fijación se le plantea a grupos de diferentes rendimientos, ejercicios con diferente tipo de dificultad”. (Arango, 1992, p. 210). En ambos casos logrando la ayuda mutua de los miembros y el control entre unos y otros.

Los miembros de un grupo se interrelacionan para la realización de una tarea concreta y son las llamadas relaciones formales o funcionales, y por los vínculos de matiz emocional, que como seres humanos presentan. Mientras mayor sea la interacción entre sus miembros, más se comunican, por lo que la estructura formal (relaciones a partir de la tarea a resolver) y la no formal (relaciones de afinidad emocional) deben ser equilibradas, valoradas y teniendo en cuenta además las relaciones interpersonales, conformar el grupo.

“Para la composición de los equipos o grupos de trabajo han de tenerse en cuenta la semejanza de actitudes, el status socioeconómico, la edad, el sexo, la raza y las características de la personalidad” (Mazorra, 1999, p. 42). Aspectos a tener en cuenta según el propósito estratégico instructivo y educativo del profesor. Luego, los equipos no estarán compuestos siempre por los mismos estudiantes; no han de ser equipos fijos. La combinación y el adecuado equilibrio de estas características tienen un importante efecto sobre el comportamiento del grupo.

Estos grupos o equipos de trabajo pueden ser homogéneos o heterogéneos en cuanto a su desarrollo:

- Equipos homogéneos: Son aquellos que están compuestos por estudiantes de similar desarrollo instructivo y formativo en el contenido objeto de estudio, no por el rendimiento académico general y sus capacidades, por lo que el profesor debe prestar especial atención a las posibles reacciones que pueda provocar esta “peligrosa” forma de organización.
- Equipos heterogéneos: Estarán compuestos por estudiantes de diferente nivel de desarrollo instructivo y formativo.

La conjugación de estas dos formas de componer los equipos, el análisis colectivo de sus ventajas para la realización del trabajo diferenciado y el no carácter estable de los miembros del equipo favorecen la aceptación por el grupo.

Los equipos homogéneos al estar compuestos por estudiantes con similar nivel de desarrollo, facilitan la comunicación entre alumno y profesor y entre los propios estudiantes. Puede así el profesor, llegar a todos los estudiantes y dar los impulsos necesarios.

Ventajas metodológicas:

- Se racionaliza el tiempo en la medida que el profesor al acercarse a un estudiante de uno de los equipos, observará el trabajo independiente, determinando los aciertos y desaciertos que por lo general, son aciertos y desaciertos de los demás miembros del equipo y dará los impulsos necesarios.
- No quedan estudiantes desatendidos, a todos llega con mayor facilidad el control de su aprendizaje.
- Se fortalece la laboriosidad, la responsabilidad individual y la colectiva a partir de la comunicación lograda entre los miembros del equipo.

Los equipos heterogéneos al estar compuestos por los estudiantes con diferentes niveles de desarrollo, facilita la ayuda mutua entre unos estudiantes y otros, la laboriosidad y la solidaridad. Por otro lado, entre los mismos estudiantes se reconoce cuáles tienen mayor nivel de desarrollo, luego, reconocerán por qué las diferencias de notas en las calificaciones de los instrumentos evaluativos

aplicados. Le permite al profesor corroborar y perfilar la clasificación de los estudiantes en cuanto al nivel de desarrollo de habilidades.

Otras ventajas están dadas en que el profesor encontrará señales de alerta que le servirán para detectar en qué tipo de ejercicio, en qué grado de dificultad y en qué situación es donde el alumno encuentra el obstáculo para llegar a la realización exitosa de la siguiente operación. Decidirá impulsos y tareas para ser realizadas con trabajo individual y caracterizará a los estudiantes referente hacia cuál equipo debe moverlo según su avance en el desarrollo de habilidades y de su intención educativa como estrategia pedagógica.

El trabajo en grupos homogéneos es recomendable en las situaciones siguientes:

- Llevar a cabo diferenciadamente la reactivación necesaria.
- Satisfacer las demandas en cuanto a la asimilación y fijación de los estudiantes que integran el grupo y con ello eliminar inseguridades.
- Permitir que los estudiantes resuelvan problemas parciales dentro de la elaboración de los conocimientos sobre la base del nivel que ellos posean.

La idea esencial de este trabajo es que los estudiantes discutan entre sí posibles vías de solución de los problemas planteados, eventualmente uno de ellos resuelva algunos pasos, comparen y discutan los resultados. Esta forma propicia la cooperación y el desarrollo del pensamiento particularmente efectivo cuando los problemas que se plantean al grupo se corresponden con el nivel de exigencia de los mismos, pues todos tienen posibilidades de tener éxito.

Trabajo con grupos heterogéneos		
Mayor exigencia en la selección de ejercicios apropiados. Los ejercicios o problemas que se plantean deben posibilitar la subdivisión en problemas parciales.	Ventaja en considerarse las particularidades individuales al distribuir las tareas. El éxito depende del resultado de cada cual. Cada estudiante reconoce la importancia de su trabajo en la resolución conjunta.	Un estudiante se hace responsable de exponer la solución hallada, ó el propio grupo lo hace. Este estudiante no siempre tiene que ser el más aventajado.

Una forma especial del trabajo en grupo heterogéneos es el estudio por parejas. Aquí se resuelven en general los mismos ejercicios, con lo cual el estudiante más aventajado tiene la tarea de ayudar a los que tienen más dificultades. Esto le da ventaja de desarrollar su capacidad de exponer en forma comprensible situaciones matemáticas al tener que dar a conocer y fijar vías de solución y eliminar dudas que podrían conducir a respuestas incorrectas.

Es bueno señalar que en ambas formas de trabajo existe el peligro de que se estabilicen las diferencias en cuanto a los rendimientos, ya que con frecuencia los estudiantes que tienen dificultades solamente resuelven los ejercicios fáciles y ante su ritmo lento de trabajo otros resuelven muchas veces una parte del ejercicio con el fin de lograr con rapidez el objetivo del grupo. Por ello es necesaria la observación permanente de los grupos de trabajo, a fin de garantizar el trabajo en correspondencia con sus posibilidades y su ejecución para cada uno de los miembros.

Los referentes teóricos y metodológicos mencionados hasta aquí, son necesarios para concebir la atención diferenciada de los estudiantes en la asignatura Matemática. Sobre esta base y las experiencias obtenidas en el PEA se ha concretado un conjunto de acciones a desarrollar para potenciar el trabajo diferenciado en el aula.

Propuesta de acciones para realizar la atención a las diferencias individuales en las clases de Matemática:

Es sabido que al docente le corresponde una tarea de alto nivel de complejidad, estimular al máximo las potencialidades de todos sus educandos y brindar una atención diferenciada a la diversidad de estudiantes que hay en las aulas, luego concebir el PEA donde se satisfaga estas exigencias es un desafío para ellos.

Una manera de proceder para contribuir con lo planteado en la Matemática es incluyendo en la concepción de los sistemas de clases las acciones que se plantean a continuación:

1. Diagnosticar a los estudiantes en cuanto a los contenidos que poseen mayores posibilidades y en los que presentan dificultades.

2. Proponer tareas docentes en las clases donde puedan continuar su desarrollo en los contenidos de mayores posibilidades y en los que presentan dificultades.
3. Elevar gradualmente el nivel de complejidad de los ejercicios y problemas; donde se tenga en cuenta la integración sistemática del contenido.
4. Utilizar métodos activos que promuevan la participación de los estudiantes en el debate o discusión de la vía de solución de un ejercicio o problema.
5. Organizar el aula de forma que estimule el trabajo productivo de los estudiantes.
6. Hacer predominar la actividad independiente.
7. Brindar los niveles de ayuda oportuna, evitando las ayudas prematuras.
8. Estimular la búsqueda de nuevas fuentes de información.
9. Evaluar continuamente el desarrollo de capacidades y habilidades de los estudiantes a través de las respuestas a las diferentes tareas docentes.

Es a través de las tareas docentes que se materializan estas acciones, por lo que a continuación se muestra cómo proceder en el diseño de un sistema de ejercicios y problemas que contribuya a potenciar el trabajo diferenciado con los estudiantes para elevar el nivel de aprendizaje del contenido “Geometría Analítica”, donde progresivamente desarrollen habilidades en la selección y aplicación de los métodos de solución y propicien tener una visión integradora de la Geometría, necesario para el cumplimiento del objetivo. Para ello se plantea el siguiente proceder para que el docente diseñe la tarea docente:

- Formular el objetivo.
- Realizar el diagnóstico integral.
- Seleccionar, rediseñar o elaborar los ejercicios y problemas.
- Organizar los ejercicios y problemas por niveles y bloques.
- Plantea las acciones para lograr el objetivo.

El tema escogido para mostrar el procedimiento se trabaja en el Preuniversitario. Se parte del objetivo: Resolver ejercicios y problemas de la Geometría Euclidiana por los métodos analíticos, haciendo uso de las operaciones con vectores, los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de la recta, a partir de los conocimientos de la Geometría Sintética, con el fin de lograr una mayor formación geométrica en los estudiantes.

En función del objetivo planteado se realiza el diagnóstico a los estudiantes, la experiencia del trabajo de varios años en la disciplina Geometría han determinado como regularidad que las limitaciones, en la mayoría de ellos, están fundamentalmente en:

- El dominio de los conceptos y procedimientos de solución.
- Determinación de un método correcto para la solución de los problemas y estas son mayores cuando se trata de escoger el más ventajoso en cuanto a la racionalidad de los pasos a realizar.
- Terminan el Preuniversitario pensando que los problemas de la Geometría Analítica, en su esencia, son diferentes a los resueltos en la Sintética.

Teniendo en cuenta lo anterior el profesor debe hacerse la pregunta ¿Qué ejercicios y problemas seleccionar o elaborar?

1. Ejercicios formales para fijar conceptos, relaciones y procedimientos de solución.
2. Problemas de la Geometría Euclidiana que fueron resueltos por la vía sintética, priorizando los de la escuela media.
3. Problemas de la Geometría Euclidiana, que no fueron resueltos por la vía sintética porque el sistema de conocimiento impartido no fue suficiente o porque la vía es muy engorrosa, priorizando los de la escuela media.

Esta clasificación de los ejercicios y problemas está estrechamente relacionado con el enunciado, muchas veces inconscientemente se acostumbra a los estudiantes a relacionar el enfoque del texto con la vía de solución, sin embargo en la vida práctica los objetos, que muchos de ellos pueden simular figuras

geométricas conocidas, no tienen datos adicionales visibles como son: coordenadas y vectores, estos deben denotarse a partir de un sistema referencial como parte del método de solución. En este sentido se pueden distinguir los siguientes niveles para evaluar el desarrollo de los estudiantes.

Niveles:

- I. Las condiciones dadas en el enunciado de los ejercicios y problemas descubren la vía de solución (ejercicios formales).
- II. Las condiciones dadas de los ejercicios y problemas no descubren la vía de solución, pero se sugiere.
- III. Las condiciones dadas de los ejercicios y problemas no descubren la vía de solución.

El tránsito por los niveles dados presupone la realización de un sistema de tareas docentes que cumpla con las exigencias reveladas que se materializan a través de las siguientes acciones.

Acciones:

1. Proponer ejercicios y problemas suficientes del nivel I para fijar los métodos de solución.
2. Ejemplificar cómo un mismo problema puede resolverse por vías y métodos diferentes.
3. Proponer ejercicios y problemas suficientes del nivel II para desarrollar habilidades en los métodos y procedimientos de solución.
4. Proponer sistemáticamente en el sistema de tareas docentes, ejercicios y problemas del nivel III.
5. Propiciar el debate de las diferentes vías, métodos y procedimientos utilizados, destacando los más racionales.

Un ejemplo sugerente para mostrar lo explicado lo constituye el problema: Demostrar que las alturas de cualquier triángulo se cortan en un punto.

El resultado “las alturas de un triángulo se cortan en un punto” lo conocen los estudiantes desde el séptimo grado de la enseñanza escolar, pero por lo general terminan el Preuniversitario sin llegar a fundamentar ese conocimiento, porque para muchos profesores y estudiantes presentar el problema de esta manera significa resolverlo por la vía sintética, la cual es muy trabajosa y necesita de realizar construcciones auxiliares que exige un alto grado de creatividad, o de otros conocimientos que no están en el currículo escolar, sin embargo, este debe ser un problema clásico a resolver cuando los estudiantes reciban la Geometría Analítica de onceno grado, introduciendo un sistema de coordenadas cartesiana rectangular, donde se haga coincidir un lado del triángulo con el eje de las abscisa y la altura relativa a ese lado con la ordenada, resultando un método sencillo de solución.

Este problema puede ser presentado de tres maneras diferentes de forma tal que todos los estudiantes de la clase puedan trabajar, como se muestra a continuación:

1. Probar que las tres alturas del triángulo ABC, de vértices A (4; 6), B (-4; 0) y C (-1; -4) se cortan en un punto.
2. Demostrar que las alturas de cualquier triángulo se cortan en un punto. Para ello inserte el triángulo convenientemente en un sistema de coordenadas rectangular.
3. Demostrar que las alturas de cualquier triángulo se cortan en un punto.

Como se observa la primera manera responde al nivel I, y es un enunciado de un problema clásico de la Geometría Analítica; la segunda corresponde al nivel II donde se ha elevado el grado de complejidad al tener el estudiante que proponer la ubicación de la figura de análisis en un sistema de coordenadas y elegir convenientemente los puntos para una demostración de la proposición universal propuesta.

En el tercer caso correspondiente al nivel III de desarrollo es donde hay que decidir si el problema se va a solucionar por los métodos sintéticos o analíticos, es por ello que este se evalúa fundamentalmente en una ejercitación integrada de la

Geometría, ya sea en la preparación para ingresar a la Universidad, para participar en Concursos y Olimpiadas de Matemática o simplemente para comprobar el desarrollo de los estudiantes en la disciplina.

Otros ejemplos de ejercicios y problemas resueltos por los métodos sintéticos que se sugieren incluir en el sistema de ejercicios de la Geometría Analítica son los siguientes:

1. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.
2. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a la base.
3. Pruebe que los puntos medios de los lados de un paralelogramo determinan un paralelogramo.
4. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases.
5. Demuestre que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.
6. Demuestre que en un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.
7. Demuestre que si se unen los puntos medios de los lados de un rombo se forma un rectángulo.

Problemas como los sugeridos propician la integración sistemática de los contenidos matemáticos, pues es un espacio ideal para reactivar en los estudiantes las propiedades de las figuras planas aprendidas en años anteriores, posibilitando el trabajo diferenciado con los que aun presentan dificultades en ello y también con los talentosos, al proporcionarle una herramienta más para profundizar en el estudio de la Geometría.

Es por lo explicado que esta concepción en el estudio de la Geometría es esencial para lograr los objetivos de la asignatura, porque permite precisar el nivel de desarrollo que va alcanzando los estudiantes, al facilitar la evaluación de manera

integrada del desarrollo de habilidades en la determinación de los métodos adecuados para resolver los problemas geométricos con la profundidad del contenido de los mismos.

La diversidad de estudiantes en las aulas, presenta múltiples necesidades, una de ellas es la atención a los niños con talento. Pero este colectivo de sujetos ha sido uno de los últimos con necesidades educativas especiales al que los sistemas educativos han empezado a prestar atención. Las razones son varias: actitud de los docentes, falta de formación para atender la diversidad, la homogeneidad de la enseñanza, entre otras. Incluso el supuesto de que este colectivo no necesita una atención especial, puesto que saldrán adelante sin ayuda, ha contribuido durante mucho tiempo a que se les olvide.

Una de las consecuencias de la falta de atención a las diferencias individuales es que muchas personas no desarrollen plenamente sus talentos y capacidades. “Un buen porcentaje de estudiantes con talento puede ver limitado el desarrollo de sus potencialidades, o bien presentar dificultades de aprendizaje y de participación, al no considerar sus necesidades educativas específicas” (Machado, 2004: 9, citado por Castro, 2008).

El talento matemático es un pilar fundamental para enfrentar los desafíos científicos-técnicos del naciente milenio; el desarrollo de la biotecnología, la electrónica, procesamiento de la información y otras tecnologías complejas requerirá, sin duda, de los conocimientos matemáticos, así como de competencias cognitivas de alto nivel, como el razonamiento abstracto y la capacidad de resolver problemas, que obviamente los métodos matemáticos contribuirán al desarrollo de estas capacidades.

El desarrollo de las potencialidades talentosas demanda de un docente altamente preparado para brindarles la atención diferenciada que necesitan, no solo en los contenidos especializados del área en que manifiesta su talento, sino en elementos psicológicos, pedagógicos y metodológicos que propicien su formación integral.

Sin embargo, la superación metodológica que reciben los docentes para la atención diferenciada en el aula está dirigida en lo fundamental a equiparar el nivel del que tiene dificultades con la media, aprovechando las potencialidades del talentoso, o sea, los prepara para darles diferentes misiones en las clases en función del objetivo, pero no en cómo elevar el grado de profundización de este objetivo con los talentosos. Existen bibliografías que plantean que esta tarea es difícil realizarla, sin embargo, en las de didáctica, incluyendo las más actuales, se deja a consideración del maestro el tratamiento diferenciado con el talento.

Es consenso de muchos autores que el talento matemático posee habilidades y capacidades excepcionales para el aprendizaje de las matemáticas y un alto nivel de desempeño creativo en la resolución de los problemas del área, apoyados en una fuerte motivación por la asignatura. En investigaciones realizadas se declara que:

Los estudiantes potencialmente talentosos en las matemáticas para llegar a considerarlos como talentos deben poseer: un sistema de conocimientos (conceptos, leyes, teoremas y procedimientos) seguros y suficientes; alto desarrollo del pensamiento en general, es decir, saber trabajar con las operaciones mentales generales y las formas del pensamiento matemático, destacándose en la capacidad para racionalizar el trabajo mental; además tener un alto nivel de desempeño creativo en la solución de los problemas (Espinosa, 2005, p. 19).

Estas condiciones no la llegan a alcanzar los estudiantes por sí solos, necesitan de un entrenamiento organizado y sistemático. La vía fundamental y tradicional que se utiliza en las escuelas para desarrollar a los talentos matemáticos son las sesiones de entrenamiento en horario complementario, para participar en los Concursos de Conocimientos, llevada a cabo por un profesor o colectivo de profesores especializados en la asignatura, que adquiere la categoría de entrenadores. Por lo general los profesores que los entrenan son aquellos que

mayores habilidades tienen en la resolución de los problemas matemáticos, sienten satisfacción al resolverlos, les gusta enseñar lo que aprenden y se motivan cuando un educando logra vencer alguna competencia y en la mayoría de los casos se forman por esfuerzo e iniciativa propia, o sea, en un proceso espontáneo.

Según los resultados investigativos (Espinosa, 2002) y (Espinosa, 2003), el trabajo con el alumno talentoso en Matemática debe comenzar con la atención diferenciada en su grupo escolar y combinarse armoniosamente con las sesiones de entrenamientos en horario complementario. Es por ello que los docentes deben estar preparados para interactuar en ambos momentos:

I. Desde la clase de Matemática, basada en la atención diferenciada y sistemática de los escolares potencialmente talentosos.

II. En horario complementario, entrenamiento a los estudiantes seleccionados para concursar.

En el primer momento intervienen todos los docentes y en el segundo los entrenadores para los Concursos de conocimientos. Estos últimos pueden ser a nivel de escuela, municipio, provincia e incluso de la preselección nacional; la selección para cada una de las instancias depende del grado de preparación y de los resultados obtenidos con sus estudiantes, luego los entrenadores de base son la cantera de este movimiento.

Para desarrollar las potencialidades talentosas desde la clase de Matemática los profesores necesitan de conocimientos, habilidades y capacidades para: diagnosticar a los talentos matemáticos; diseñar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática diferenciado a partir del diagnóstico, donde existan tareas docentes dirigidas a potenciar el desarrollo de los talentos; resolver los ejercicios y problemas de los libros de texto del grado y seleccionar sistemas de ejercicios y problemas graduando su nivel de complejidad.

Obtener un buen diagnóstico de estos estudiantes es lo que permite poder realizar el trabajo diferenciado con mayor efectividad, para lograrlo es necesario contar con un sistema de instrumentos que dé esta valoración y saber interactuar con él o

estar preparado para confeccionar su propio sistema de instrumentos. En el horario complementario prima los conocimientos, habilidades y capacidades de los entrenadores para resolver problemas de concursos y Olimpiadas, diseñar las clases de entrenamiento y elaborar temarios para estas competencias

Los problemas de concursos y Olimpiadas tienen características propias, pero como todo problema, cumple con la definición que mayor aceptación tiene por los distintos autores en los últimos tiempos, es decir, es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo orientado por la búsqueda hacia lo desconocido, que puede ser una magnitud o dato, la vía de solución y que se quiera resolver. En la Matemática se presentan generalmente dos tipos de problemas fundamentales: aquellos en que se puede probar o demostrar la verdad o falsedad de una proposición y aquellos en que se trata de alcanzar un resultado desconocido.

La concepción de los sistemas de problemas para el entrenamiento de estudiantes concursantes en la asignatura Matemática debe tener en cuenta además de lo mencionado anteriormente: los problemas que ofrecen al alumno una visión del contenido de la ciencia y contribuyen al logro de una sólida formación matemática y; los problemas típicos de las competiciones matemáticas que ofrecen al alumno una visión de las situaciones específicas y de determinada complejidad que son resueltas con estrategias particulares, originales y novedosas. Los sistemas de problemas dirigidos a lograr una sólida formación matemática se concretan en el perfeccionamiento de los procedimientos de cálculo, de los métodos de demostración, de pronóstico a partir de datos numéricos, de los métodos de construcción de lugares geométricos y de las técnicas de modelación funcional. Todos ellos desde los temas Álgebra, Teoría de los números, Geometría y Matemática Discreta.

Por otro lado, hay que considerar los tipos de entrenamientos que deben efectuarse fuera del programa de Matemática, se considera pertinente los enunciados por Rebollar (1997):

Entrenamiento de orientación. Va dirigido a los estudiantes que se inician en los concursos y aún no poseen un universo de problemas y estrategias de soluciones ya formadas y requieren de actividades que favorezcan su asimilación y junto con ellas les ofrezcan seguridad, motivación y métodos para llevar a cabo la resolución de estos problemas de forma independiente. Pueden ser tratados algunos contenidos opcionales para su aplicación posterior a ejercicios determinados. En los entrenamientos se debe:

- Proporcionar a los estudiantes la información necesaria relacionada con el contenido a tratar.
- Explicar ejercicios a modo de ejemplos para lograr de ellos su reproducción y fundamentación.
- Facilitarles la bibliografía adecuada y que así puedan profundizar en el contenido necesario para la solución de problemas que se proponen posteriormente.
- Proponer guías de ejercicios con diferentes vías de solución para que lleguen a poseer un universo de estrategia de trabajo.

Entrenamiento de resolución de problemas. Son aquellos en que la actividad fundamental es la resolución de problemas con la total independencia del alumno y sólo recibe la ayuda necesaria del profesor. En este tipo de entrenamiento se deben tener en cuenta indicadores como: la precisión de las respuestas en el lenguaje matemático apropiado y la rapidez, considerando la prioridad de la precisión de las respuestas y estimular la búsqueda de la solución en el tiempo más racional posible según las condiciones del concursante. Para este tipo de entrenamiento se debe:

- Debatir aquellos ejercicios de la guía orientada que presentan determinada complejidad y que se resuelven mediante estrategias particulares, originales o novedosas. Así se realiza un análisis colectivo de las soluciones propuestas, estimulando las valoraciones y las precisiones de los contenidos matemáticos.

- Resolver ejercicios con total independencia para valorar la precisión de las respuestas en el lenguaje matemático apropiado, así como la rapidez.
- Orientar una guía de problemas para el trabajo independiente fuera de la sesión de clases, para que continúen sistematizando los métodos de trabajo.

Entrenamiento de control. Se encamina a la realización de una actividad en la que se proponen problemas en cantidad y complejidad de acuerdo con el nivel de competencia para la que se entrenan los estudiantes y se atienden las principales reglas en cuanto a tiempo y exigencias organizativas. Este tipo de entrenamiento se propone preparar al alumno psíquicamente para la competencia para vencer el objetivo de resolver los problemas propuestos en el tiempo indicado.

La experiencia en la práctica pedagógica y los estudios de las investigaciones realizadas relacionadas con el tema del desarrollo del talento matemático, permite inferir que para concebir los entrenamientos es necesario que el profesor, en primer lugar, cuente con el diseño de un programa; posea un profundo dominio de los temas propuestos; tenga habilidades y capacidades desarrolladas en la solución de los ejercicios y problemas de concurso y Olimpiadas relacionados con el tema a entrenar; esté preparado para diagnosticar las potencialidades y dificultades de los estudiantes; posea habilidades en la selección de los ejercicios y problemas teniendo en cuenta el diagnóstico y; se identifique con una estrategia metodológica para la concepción de los encuentros.

Se deben diseñar acciones que favorezcan la atención diferenciada de los estudiantes potencialmente talentosos en Matemática, desde la clase de Matemática hasta el entrenamiento en horario complementario.

Desde la clase de Matemática, para la atención diferenciada y sistemática de los escolares, se proponen las siguientes acciones que favorecen la atención diferenciada de los estudiantes:

- Identificar al escolar potencialmente talentoso.
- Trabajar con el mismo sistema de conocimientos del programa del grado.

- Propiciar la utilización de varias vías de solución para un problema, en cuáles contenidos y problemas típicos de concurso posee mayores posibilidades y en cuáles presenta dificultades por falta de conocimientos o de los métodos de solución necesarios.
- Atender en las clases de entrenamiento diferenciadamente a los estudiantes en cuanto al resultado del diagnóstico, proporcionándoles grupos de ejercicios que les permitan seguir desarrollando sus posibilidades y erradicar sus deficiencias.
- Valorar continuamente el desarrollo de capacidades de los estudiantes a través de las clases de resolución de problemas y de la aplicación del entrenamiento de control.
- Incorporar elementos nuevos del conocimiento al pasar de una etapa de entrenamiento a otra, así como elevar el nivel de complejidad de los problemas teniendo en cuenta que la mayoría de estos incluyan los conocimientos y habilidades precedentes, propiciando una mayor actividad intelectual.
- Los encuentros para el entrenamiento de los estudiantes concursantes deben caracterizarse por métodos activos que promuevan la participación, el debate o discusión de las vías de solución.
- Lograr que los estudiantes resuelvan la mayoría de los problemas independientemente y que tengan que revisar bibliografía para así contribuir al logro de su independencia cognoscitiva.

El grupo de acciones, correspondiente al segundo momento es apoyado con materiales de ejercicios resueltos y el software Sofhia de la Colección Futuro que le facilitan al docente, en una etapa inicial, preparar sus actividades y a la vez autoprepararse para actuar con independencia y creatividad en esta exigente tarea.

Las acciones agrupadas en el primer momento se materializan a través de sistemas de ejercicios y problemas, que deben ser accesibles a toda el aula,

según la organización del trabajo diferenciado que el profesor asuma. Para lograr el carácter sistémico de los ejercicios y problemas que se proponen es imprescindible no descuidar el aspecto 4, por ejemplo, en los temas de Geometría Plana, hay que tener presente determinadas exigencias que deben penetrar en todos los grados como: el dominio de conceptos, teoremas y definiciones; el esbozo de figuras; los métodos de demostración de igualdades geométricas y el cálculo geométrico. Por eso debe proyectarse el nivel a lograr a medida que el estudiante avanza en los estudios, por ejemplo, en la segunda exigencia (esbozo de figuras), tomando como base la metodología propuesta por Pérez (2000), puede desglosarse en los siguientes niveles:

- Dominar los conceptos matemáticos estudiados.
- Identificar conceptos matemáticos.
- Representar geoméricamente los conceptos.
- Resolver ejercicios con texto geométrico donde tengan que hacer la figura de análisis.
- Textos donde intervengan una figura geométrica y sus elementos fundamentales dando sus notaciones.
- Textos donde intervengan más de una figura geométrica y sus elementos dando las notaciones.
- Texto que indique la figura a realizar, sin dar sus notaciones.
- Resolver ejercicios donde aparezcan construcciones auxiliares sugeridas.
- Resolver ejercicios donde tengan que realizar construcciones auxiliares, como: trazado de rectas notables en un triángulo, paralela a una recta dada, diagonal de un cuadrilátero, bisectriz de un ángulo, prolongaciones de segmentos.

Se propone alcanzar los siguientes niveles por grado: nivel I, sexto grado; nivel IIa, séptimo grado; nivel IIc, octavo grado; nivel III, noveno grado y nivel IV, décimo grado.

Se propone realizar la evaluación del conjunto de acciones como parte del trabajo docente-metodológico del profesor, a partir de los siguientes indicadores:

- Diagnóstico de los estudiantes talentosos.
- Diseño de las actividades diferenciadoras en los planes de clases.
- Sistemática en las actividades programadas.
- Control de las actividades orientadas.
- Resultados de los estudiantes.

Los dos grupos de acciones proyectadas en ambos momentos guardan estrecha relación, el primer grupo constituye una excelente vía de retroalimentación del diagnóstico de las conductas talentosas y proporciona los conocimientos, habilidades y capacidades básicas, y el segundo refuerza y amplía los conocimientos, habilidades y capacidades que adquirieron en el aula, además de perfeccionar el diagnóstico.

Las ideas expresadas son referenciales para el trabajo metodológico y de superación con los profesores que imparten la asignatura Matemática, para contribuir con la atención diferenciada de los estudiantes talentosos, propiciando su preparación en el contenido didáctico para la concepción sistemática del trabajo a realizar en este sentido y constituyen una base orientadora de las áreas donde deben reforzar su especialización para un mejor desempeño en la utilización de métodos que impliquen a los estudiantes en su desarrollo.

VIII. LA UTILIZACIÓN DE RECURSOS INFOTECNOLÓGICOS

Una visión renovadora de la utilización de los medios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática debe tener en cuenta la incorporación de las tecnologías de la información y las comunicaciones, que conjuntamente con medios tradicionales como la pizarra, el libro de texto, las hojas de trabajo, el retroproyector, la televisión y el video, deben ampliar las posibilidades para contribuir a que el docente pueda dirigir el proceso con mayor dinamismo, visibilidad, flexibilidad y despertar la motivación por aprender en el estudiante.

Los nuevos escenarios y condiciones complejas que se presentan y vislumbran para las próximas décadas del siglo XXI invadidos por un amplio uso de las tecnologías, imponen la necesidad de que en el diseño curricular se propicien las condiciones para fortalecer la integración de las tecnologías de la información y comunicación (TIC), al proceso de enseñanza-aprendizaje, en aras de lograr una amplia cultura digital como un rasgo esencial de calidad en la formación de los estudiantes en cualquier nivel de enseñanza.

En este sentido se debe prestar especial atención al uso de las TIC en la solución de tareas de aprendizaje: como medios de enseñanza, como herramientas de trabajo y comunicación y como fuentes de conocimiento.

Mucho se ha escrito y existen valiosas experiencias sobre la utilización de los medios de enseñanza tradicionales tales como la pizarra, el libro de texto, la televisión y el video. Se hace oportuno considerar del mismo modo, que el proceso enseñanza-aprendizaje como objeto de estudio de la Didáctica, con la utilización de medios de enseñanza como los dispositivos móviles y tecnologías emergentes; requiere mediante la investigación educativa fundamentar los avances, que como ciencia dinámica requiere la Didáctica misma, para integrar estas tecnologías emergentes a su cuerpo científico.

Ramírez (2017) considera que el uso de dispositivos móviles como: teléfonos móviles, organizadores y asistentes personales digitales (personal digital assistant), *Smartphones*, PC portátil, tabletas, libros electrónicos (*e-books*) dentro

del aula, como herramientas dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje permiten a los estudiantes mejorar los resultados de las actividades académicas.

El tema de permitir o prohibir el uso de dispositivos móviles en el aula debería reemplazarse por cómo los docentes pueden darle un uso adecuado a tales dispositivos en sus clases (Alonso, et al., 2021).

La tecnología móvil, hoy emergente en espacios educativos, comienza a utilizarse como herramienta didáctica para los procesos formativos de los estudiantes. Es por ello que requiere de manera impostergable la renovación de los paradigmas educativos predominantes.

Integrar el aprendizaje móvil al proceso de enseñanza-aprendizaje implica una planificación sistemática de selección de contenidos, diseño de actividades, formas de organización, formulación de objetivos y de una evaluación que se ajuste al aprendizaje móvil. No se puede afirmar entonces, que es un proceso fácil; debido a que se debe contar con recursos tanto tecnológicos, como del personal docente capacitado en el área de las tecnologías de la información y la comunicación, que les permita a las instituciones educativas implementar procesos que integren el aprendizaje móvil.

Cuba ha avanzado significativamente en la cultura tecnológica de su población y los datos más recientes muestran un alto por ciento de disponibilidad de estas tecnologías, particularmente de teléfonos móviles, tabletas electrónicas y ordenadores personales, así como la conexión a internet. Estas son potencialidades que deben ser tenidas en cuenta en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje en cualquiera de los niveles educativos.

Habitualmente la mayoría de las aplicaciones móviles que son creadas en la actualidad, se diseñan con el objetivo de proveer entretenimiento, sin embargo, existen aplicaciones que pueden contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje si se aprovechan de forma eficiente en las instituciones educativas.

Las aplicaciones móviles son herramientas que brindan una gran variedad de posibilidades para satisfacer necesidades particulares de las personas del siglo XXI; permiten hacer transacciones financieras, comunicarse mediante chat, video

y audio de manera personal o colectiva, jugar, descargar contenidos, crear y editar imágenes y texto, entre otras funciones. Lo que implica que, en un dispositivo móvil, el ser humano cuenta con una herramienta que le permite solucionar diversas situaciones en cualquier momento y lugar.

Estas ventajas que ofrecen las aplicaciones móviles pueden ser incorporadas en la educación de manera sistemática, de tal forma, que las instituciones educativas puedan formular estrategias para la incorporación del aprendizaje móvil al proceso de enseñanza-aprendizaje, en la búsqueda de un acercamiento de los estudiantes actuales a la construcción del conocimiento; utilizando los nuevos medios que brinda la tecnología.

Un teléfono inteligente o una tableta digital con conexión a internet; se puede convertir en un medio de enseñanza, donde el usuario puede entrar a una tienda virtual y descargar una serie de aplicaciones, que se ajusten a los objetivos planteados en el proceso enseñanza-aprendizaje, lo que implica establecer la relación dialéctica que debe existir entre las diferentes categorías del proceso de enseñanza-aprendizaje, soportado por supuesto en una planeación sistemática.

En las instituciones educativas se presentan contradicciones relacionadas en algunos casos, con la diferencia generacional entre el profesorado y el alumnado, así como también por esa resistencia que se puede presentar a los cambios sociales y por consiguiente a los cambios que requiere el proceso de enseñanza-aprendizaje. Son variadas las estrategias utilizadas para evitar que los estudiantes durante las actividades desarrolladas en el aula utilicen los teléfonos móviles o dispositivos electrónicos como agentes distractores del proceso enseñanza-aprendizaje.

Por otro lado, se establece que la utilización de teléfonos móviles en la educación presenta la posibilidad de hacer el aprendizaje más accesible, colaborativo y relevante. Como una alternativa de bajo costo frente a los ordenadores, los teléfonos móviles pueden incrementar el acceso a Internet y al contenido educativo digital y, debido a que son portátiles, también pueden facilitar el aprendizaje tanto fuera como dentro de las escuelas. La proliferación de los

medios sociales también ha creado nuevas oportunidades de colaboración mediante las tecnologías móviles, que se pueden aprovechar con fines educativos.

Albarelo, Arri y García (2021) reflexionan que en la educación universitaria existe un desafío pedagógico sobre el uso de teléfonos inteligentes, por un lado, los dispositivos constituyen herramientas de interacción; en el otro lado, está la pérdida de atención y distracciones que pueden provocar.

La utilización de los teléfonos móviles como medio para el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene ventajas y por supuesto sus limitaciones, que deben ser tenidas en cuenta por el profesor. Entre las ventajas pueden ser consideradas las siguientes:

- Uso eficiente del tiempo: Se habla de la utilización de los tiempos muertos, que son aquellos que se destinan en labores de transporte, espera para ser atendido, para ser empleados con fines de aprendizaje.
- Expansión de la alfabetización digital: Muchos de los usuarios de la tecnología móvil utilizan esta herramienta como medio de entretenimiento y comunicación social, y aunque su uso como forma de aprendizaje no está muy difundido se considera de enorme potencial.
- Accesibilidad: Los dispositivos están al alcance de casi cualquier persona, así como los servicios necesarios para su uso. Con un teléfono puedes consultar el significado de una palabra en vez de usar el diccionario, hacer los cálculos en la calculadora, puedes hacer una consulta en Internet, visitar un museo de arte sin tener que ir hasta ahí. Es súper potente.
- Contacto social: El estudiante puede estar en contacto con compañeros y tutores en cualquier momento para recibir información y facilitar su aprendizaje.
- Mejoramiento de la productividad: Al hacer uso efectivo de tiempos muertos y el poder recibir retroalimentación a pedido, permite que los procesos de enseñanza-aprendizaje se hagan más rápido y de modo efectivo, aumentando la productividad del estudiante. Se presentan los conceptos de

forma más visual e interactiva, permiten relacionar las Matemáticas con otros aspectos de la vida para que resulten más accesibles.

- Economía: Antes pedías computadoras en las aulas y te decían no hay dinero, ahora los estudiantes tienen un móvil y les podemos decir no lo usen, o ya que lo tienen, podemos sacarle todo el partido.
- Tecnología: Posee capacidades técnicas interesantes que han propiciado su aceptación, entre las que se pueden mencionar lo reducido de su tamaño, su carácter personal y, en especial, una gran conectividad que le permite acceder en todo momento y lugar a sitios de información y a redes sociales.
- Aprendizaje colaborativo: El estar en contacto con los compañeros de curso redunda en beneficio al momento de realizar trabajos que involucren colaboración, ya que la misma se refuerza con la presencia digital de los integrantes permitiendo aportes y retroalimentación.
- Incremento en el estudio individual: Los aparatos usados en este tipo de tecnología son personales y por tanto su uso implica constancia, responsabilidad y motivación por parte del estudiante para cumplir con sus deberes y trabajos.
- Información eficaz: Los contenidos transmitidos a los estudiantes por este medio deben tener características especiales y una de ellas es su tamaño.
- Motivación y Orientación profesional: Mejorar la enseñanza de la Matemática para que sea más atractiva y para que genere más vocaciones de ese perfil profesional.
- Incremento de materiales: Los profesores pueden diseñar y poner a disposición de los estudiantes materiales que contribuyan al aprendizaje. Se generan recursos matemáticos digitales adaptados al móvil; son pequeñas lecciones que explican visualmente el contenido matemático e incluso plantean un tipo de preguntas para los estudiantes.

- Uso de idioma inglés: Por lo general aparecen en este idioma lo que contribuye al uso práctico por el estudiante.

La utilización de teléfonos inteligentes en la educación superior presenta la posibilidad de hacer el aprendizaje más accesible, colaborativo y relevante. Como una alternativa de bajo costo frente a los ordenadores, el teléfono inteligente puede incrementar el acceso a internet y al contenido educativo digital y, debido a que son portátiles, también pueden facilitar el aprendizaje tanto fuera como dentro de la clase (Consuegra, 2024, p.41).

La Matemática tiene dificultades curriculares porque es una asignatura demasiado abstracta, se enseña de una manera demasiado genérica, por lo que videos, multimedias, animaciones, software, paquetes informáticos y aplicaciones de los teléfonos móviles hacen que el aprendizaje sea más real y atractivo.

Entre las principales limitaciones pueden ser mencionadas las siguientes:

- Problemas de conectividad a internet, no todos los miembros de la población tienen disponible conexión a internet
- Inversión de mucho tiempo en la planificación de las actividades y la creación de hábitos de estudio en los dispositivos móviles, pues los jóvenes por lo general usan sus teléfonos inteligentes en actividades para el ocio.
- Falta de formación del profesorado en la integración eficiente de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Disponibilidad de equipos, aunque una gran mayoría de la población ha adquirido dispositivos móviles no todos cuentan con estos dispositivos.

Teniendo en cuenta el papel protagónico insustituible del docente en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje y que en el tema abordado las experiencias prácticas son muy pocas, se considera conveniente proponer un procedimiento que contribuya a la adquisición de una manera efectiva y más

rápida de las acciones fundamentales que debe ejecutar el docente ante la tarea de interactuar con las aplicaciones, software y paquetes informáticos que se seleccionen según el programa de la asignatura, usando teléfonos móviles.

El procedimiento que se propone es el siguiente:

- Conocer los fundamentos, las potencialidades y limitaciones de la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- Conocer e instalar en el teléfono móvil, las aplicaciones informáticas, software y paquete informáticos más comunes que se utilizan en la asignatura Matemática.
- Incrementar la práctica en esas aplicaciones de forma individual y colectiva.
- Determinar las aplicaciones informáticas, software y paquetes informáticos que se proponen y que deben estar en los programas de disciplina y de asignatura.
- Perfeccionar los programas de las asignaturas en cuanto a la utilización de aplicaciones informáticas, software y paquetes informáticos, mediante teléfonos móviles.
- Diagnosticar el nivel de posibilidades que tiene el grupo de estudiantes para el uso de teléfonos móviles.
- Sistematizar la utilización de las mismas como parte de las clases y de la actividad independiente del estudiante.
- Evaluar el uso de las aplicaciones informáticas en las diferentes formas de evaluación.

Seguidamente se presentan algunas aplicaciones informáticas, software y paquetes informáticos que pueden ser utilizados en la docencia:

1. Excel (Hojas de cálculo)

2. FX CalculusSolver

- Consta de un menú de ocho contenidos matemáticos con 41 submenús, son ellos Computation, Pre- Álgebra review, Álgebra review, Function, Limit, Differentiation, Integral y Graph.

- Tiene un gran número de ejercicios, los impares resueltos con tutoriales para exponer la solución y los pares con la respuesta. También edita.

3. MalMath

- Potente y muy completa aplicación que calcula, evalúa funciones elementales, calcula límites funcionales, deriva e integra (indefinida y definida), en las impropias plantea la vía de solución.
- Grafica funciones de una variable y muestra las principales propiedades.

4. Calculus

- Una aplicación con información teórica en inglés con un menú de 12 contenidos, son ellos functions, limits, continuity, differentiability, tools, differentiation, applicationsofderivatives, indefinite integral, definite integral, áreas under curves, differentialequations y trigonometry formulas.

5. Fórmulas matemáticas

- Una recopilación de las principales fórmulas que más usamos en aritmética básica, álgebra, cálculo, geometría, trigonometría y lógica

6. GraphingCalculator

- Calculadora básica, científica y graficadora.

7. Calculadora Mathlab

- Calculadora, grafica funciones (analiza propiedades principales de la función) y tabla para evaluar funciones de hasta tres variables.

8. Recursos informáticos (correo electrónico, chat, blogs, foros, presentaciones electrónicas)

Entre las principales vías de utilización de estos recursos se encuentran la simplificación, rapidez y comprobación de resultados de cálculos aritméticos, algebraicos, de límites, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, la presentación y el análisis de funciones mediante sus propiedades y la graficación, resumen de fórmulas, identidades y relaciones más utilizadas y que deben ser recordadas, la elaboración y comprensión de conceptos y teoremas y la elaboración y comunicación de informes, materiales didácticos, presentaciones, entre otras.

Los asistentes matemáticos

El desarrollo de las aplicaciones informáticas aplicadas a la Matemática han revitalizado el proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma, las posibilidades de dinamismo a través de la interacción de los estudiantes con los ordenadores han hecho más atractiva la Matemática y han cambiado las estrategias educativas por parte de los docentes a la hora de impartir un contenido, generando enfoques en los cuales el estudiante puede descubrir los conocimientos a partir de la experimentación.

Estas aplicaciones informáticas se conocen como asistentes matemáticos que permiten la solución de problemas matemáticos a partir del establecimiento de las premisas o datos iniciales del problema, permitiendo la realización de cambios dinámicos a los mismos para arribar a diversas soluciones que posibilitan establecer relaciones en estos que pueden ser tanto figuras geométricas como parámetros de ecuaciones y a través de estas relaciones se puede realizar la búsqueda de teoremas, fórmulas y propiedades.

Pueden enumerarse las siguientes ventajas del uso de los asistentes en el PEAM:

1. Permiten la experimentación de las Matemáticas.
2. Facilitan la integración de las diversas imágenes conceptuales a través de sus capacidades gráficas.
3. Al utilizar el estudiante menos tiempo en la realización de cálculos rutinarios este tiene un espacio mayor de tiempo para el análisis y reflexión de los resultados obtenidos.
4. Facilitan el tratamiento de problemas que requieren la modelación.
5. Facilitan una mayor agilidad en la resolución de problemas por parte del estudiante a través de una experimentación rápida y segura.
6. Permiten autonomía por parte del estudiante en su aprendizaje en función de sus características individuales.

7. Posibilitan la creación de contextos de trabajo colectivo donde se desarrollarían valores como el humanismo, la solidaridad y el colectivismo, generando un proceso de aprendizaje cooperativo o colaborativo.
8. A través de la experimentación favorecen la investigación y el descubrimiento de los contenidos matemáticos.
9. Por su carácter dinámico e interactivo pueden elevar el nivel de motivación de los estudiantes por la Matemática.

Lima y Rodríguez (2010) en “La educación matemática en entornos virtuales”, plantean que las características más significativas que presentan los asistentes son:

- La representación múltiple de diferentes sistemas de notación.
- El dinamismo.
- El almacenamiento de trazas de los procedimientos.
- La interactividad, es decir, las pautas que debe seguir el estudiante para realizar sus acciones.
- El almacenamiento de información.
- El aprendizaje colaborativo.
- La comunicación.

Los asistentes pueden ser agrupados en tres tipologías abarcando tres áreas principales de la Matemática (Álgebra, Geometría y Estadística), aunque muchos a pesar de pertenecer a alguna de estas categorías incluyen características de las otras.

- Sistemas de cálculo simbólico (CAS).
 - MAPLE: orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue

desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá. Maple es un lenguaje de programación interpretado.

- **DERIVE:** es un potente programa para el cálculo matemático avanzado: variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, vectores, matrices, trigonometría, etc. También tiene capacidades de calculadora científica, y puede representar funciones gráficas en dos y tres dimensiones en varios sistemas coordenados. La potencia de Derive es enorme y no resulta complicado de manejar, máxime teniendo en cuenta la gran cantidad de posibilidades que ofrece. Es fácil navegar a través de él y consultar la ayuda online y la tabla de contenidos. El usuario también puede personalizar menús, barras de herramientas y atajos de teclado. Desarrollado como un sucesor de muMATH por SoftWarehouse en Honolulu, Hawaii, EE. UU.
- **MATHEMATICA:** utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemáticas y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en WolframResearch, compañía ubicada en Champaign, Illinois. A pesar de ser considerado como un sistema de álgebra computacional, es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general.
- **MATLAB:** (abreviatura de MATrixLABoratory, "laboratorio de matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux. Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. El paquete MATLAB dispone de dos herramientas adicionales

que expanden sus prestaciones, a saber, Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI). Además, se pueden ampliar las capacidades de MATLAB con las cajas de herramientas (toolboxes); y las de Simulink con los paquetes de bloques (blocksets). Es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo. En los últimos años ha aumentado el número de prestaciones, como la de programar directamente procesadores digitales de señal o crear código VHDL.

- MATHCAD: distribuido por PTC. En comparación a otros softwares como Scilab y MATLAB, MathCad es menos poderoso y no permite aprovechar el hardware. Su filosofía es que es un programa más de documentación que de cálculo, aunque también es potente en este ámbito, es muy visual y permite el uso de plantillas de funciones en las que solo es necesario escribir los valores deseados, incluso para graficar funciones.

➤ Sistemas de Geometría Dinámica.(DGS)

- CABRI GEOMETRY II: Es uno de los primeros software para el tratamiento de la Geometría, fue desarrollado por investigadores del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del Instituto de Informática y Matemática Aplicadas de la Universidad “Joseph Fourier” de Grenoble con el apoyo del Centro Nacional de Investigación Científica de Francia. Fue presentado a la comunidad educativa en una conferencia en Budapest en 1988. Incluye geometría analítica, transformacional y dinámica.
- GEOMETER'S SKETCHPAD O GEÓMETRA: Elaborado en los Estados Unidos de América por la Fundación Nacional de las Ciencias y el Proyecto de Geometría Visual del SwarthmoreCollege. Este es un paquete comercial y permite representar y manipular objetos matemáticos y sus relaciones. Tiene potencialidades para el estudio de la geometría, el álgebra, la trigonometría y el cálculo.
- GEOGEBRA.

➤ Estadísticos.

- SPSS
- STADISTICA
- HOJAS ELECTRÓNICAS DE CÁLCULO (MICROSOFT OFFICE EXCEL, OPEN OFFICE CALC)

Características del software Geogebra.

GeoGebra es un software libre, de plataformas múltiples que está diseñado para la educación. Permite abordar dinámicamente el estudio de la Matemática en un ámbito en que se reúnen la Geometría, el Álgebra y el Cálculo. Por estos motivos parece adecuado clasificar a GeoGebra como un programa para la educación Matemática (Lima, 2013, p. 25).

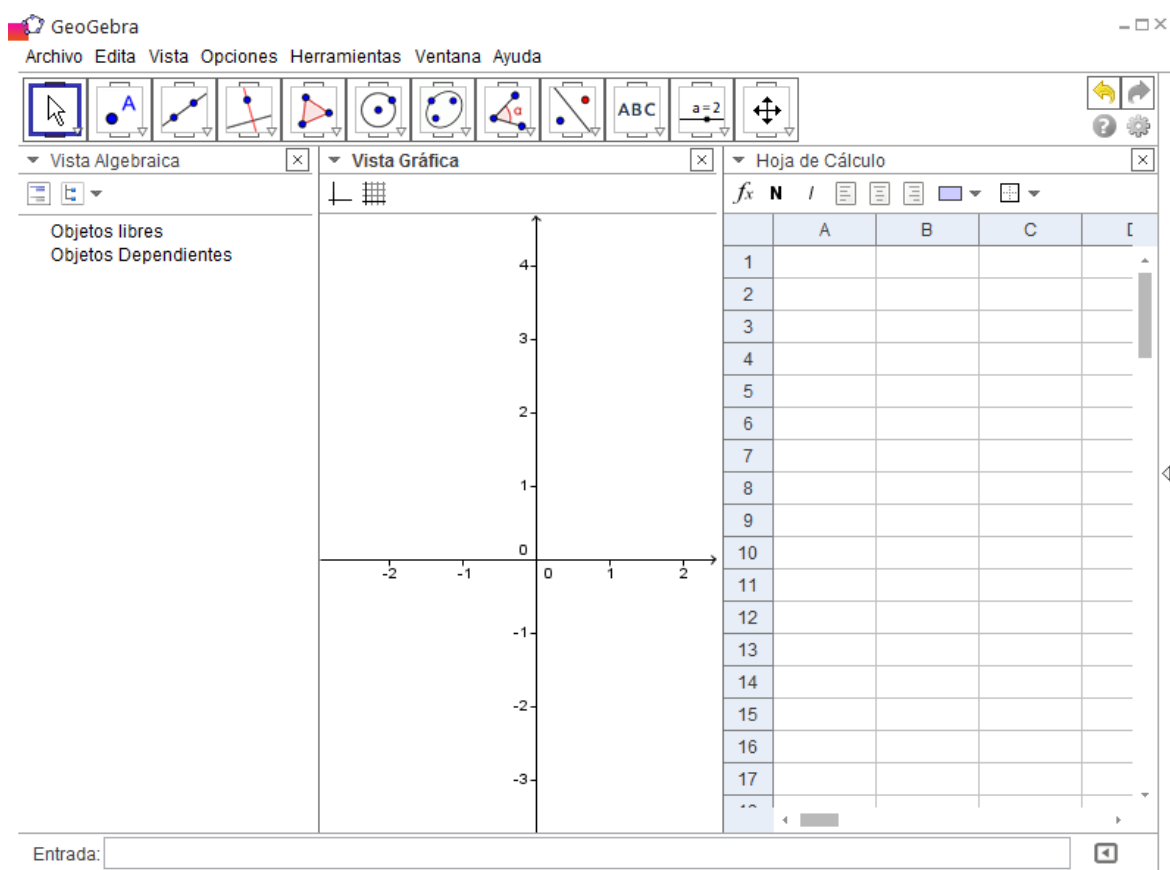
El asistente GeoGebra a pesar de que se categorizó como Sistema de Geometría Dinámica, tiene algunos elementos de los Asistentes de Cálculo Simbólico al combinar las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo. No tiene la potencia de los programas CAS ya que está diseñado para la educación mientras que los otros programas están diseñados para uso profesional, pero sí tiene las mismas funcionalidades que los programas DGS. Una de sus principales ventajas es que cuenta con un repositorio en internet (GeogebraTube), en el cual los usuarios pueden compartir los medios elaborados con esta herramienta.

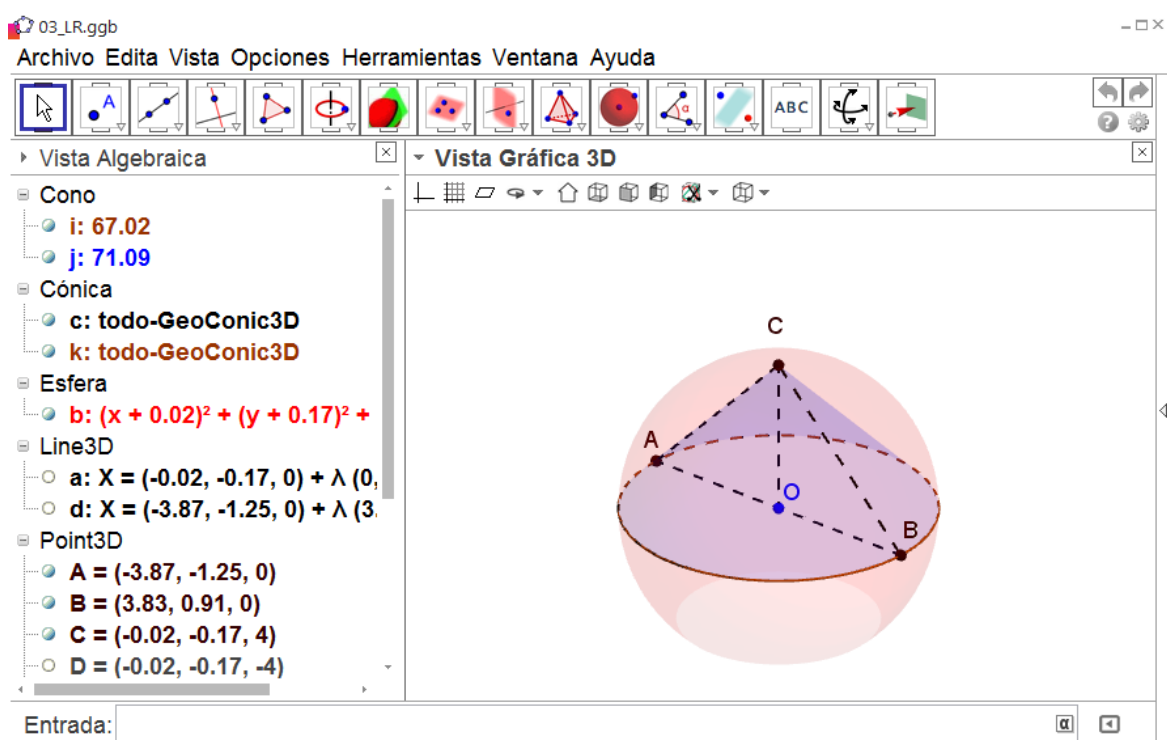
GeoGebra ofrece cinco vistas diferentes para la interacción con los objetos matemáticos que permite apreciarlos de tres formas diferentes:

- Dos Vistas Gráficas (como en el caso de puntos y gráficos de funciones). Empleando las herramientas de construcción disponibles en la Barra de Herramientas, pueden realizarse construcciones geométricas en la Vista Gráfica.

- Vistas Gráfica 3D (similar a las otras vistas gráficas pero para el tratamiento de la geometría del espacio). Empleando las herramientas de construcción disponibles en la Barra de Herramientas, pueden realizarse construcciones de cuerpos geométricos. Esta funcionalidad aparece con la versión 5 de este asistente.
- Vista Algebraica (como coordenadas de puntos y ecuaciones). Desde la Barra de Entrada de GeoGebra pueden ingresarse directamente expresiones algebraicas. Después de pulsar la tecla Enter, lo ingresado aparece en la Vista Algebraica y, automáticamente, su representación gráfica en la Vista Gráfica. Por ejemplo, al ingresar $f(x) = x^2$ aparece la función cuadrática en la Vista Algebraica y el gráfico de la parábola en la Vista Gráfica. En la Vista Algebraica, se distinguen los objetos matemáticos libres de los dependientes. Es libre todo nuevo objeto creado sin emplear ninguno de los ya existentes y, viceversa, será dependiente, el que derivara de alguno previo.
- Vista de Hoja de Cálculo (en celdas de una hoja de cálculo). En las celdas de una hoja de cálculo, pueden ingresarse tanto números como cualquier otro tipo de objeto matemático tratado por GeoGebra (sean coordenadas de puntos, funciones, comandos). Cuando corresponde, también aparece de inmediato, en la Vista Gráfica, la representación del objeto ingresado en la celda, cuyo nombre coincide con el de la celda de la hoja de cálculo a partir de la cual fue creado (por ejemplo: A5, C1, D3.).
- Vista de Cálculo Simbólico (Una sucesión de líneas). A través de la cual es posible la realización de secuencias de cálculo en las cuales se pueden resolver sistemas de ecuaciones, calcular derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, trabajo con matrices. Esta puede integrarse con las demás vistas para la representación gráfica de una derivada o la función que es solución de una ecuación diferencial, entre otras posibilidades.

Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente.





Los componentes didácticos de proceso de enseñanza – aprendizaje con el uso de los asistentes matemáticos:

Los objetivos deben expresar la interacción con las representaciones y los parámetros permitiendo la obtención de los conocimientos como resultado de la experimentación, así el estudiante partiendo de sus conocimientos previos puede descubrir conceptos, leyes, teoremas, propiedades sin dejar a un lado la necesidad de una demostración matemática de los mismos.

Los contenidos matemáticos deben reestructurarse y ser abordados desde un enfoque en el cual la resolución de problemas sea la vía para que el estudiante busque soluciones a partir de la exploración y experimentación teniendo en cuenta la posibilidad de que algunas propiedades como parámetros o medidas cambien su valor permitiendo, de esta forma el estudiante podrá establecer en qué medida modifica la solución del problema. Debe presentarse como situaciones de aprendizaje en las que se oriente un sistema de tareas interactivas con los asistentes facilitando la búsqueda de los contenidos.

Hay que tener en cuenta que, aunque la tecnología es útil para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, esta no puede ser la única que se emplee porque se podrían perder ciertas habilidades como trazar, medir, comparar, construir, calcular, entre otras más.

Los métodos deben estar enfocados a favorecer un aprendizaje desarrollador por parte de los estudiantes a través de la búsqueda y experimentación. Además, deben estar orientados al estudio independiente poniendo al estudiante en una posición activa convirtiéndose en protagonista dentro del proceso bajo la conducción del docente.

Los medios, en este caso los asistentes deben ser escogidos teniendo en cuenta las habilidades, el contenido y el nivel de profundidad dentro de la actividad a desarrollar.

En las formas organizativas se deben seleccionar las que promuevan el trabajo grupal permitiendo que los estudiantes socialicen sus experiencias en la interacción y experimentación usando la tecnología. Al diseñar las actividades el docente debe tener en cuenta que, en el trabajo grupal, estas deben realizarse en los laboratorios de informática y se sugiere utilizar dúos a partir de la premisa de intercambio mutuo.

La evaluación está relacionada con el cumplimiento de los objetivos propuestos para el desarrollo de las habilidades matemáticas y la obtención del contenido con el empleo de las tecnologías. Todas las ventajas que ofrece el dinamismo de los asistentes para la experimentación matemática favorecen una evaluación desde una perspectiva autorreguladora del aprendizaje por parte de los estudiantes. Además, que la capacidad de almacenamiento digital de los resultados de la interacción y el uso tecnologías de transmisión de información posibilita tanto la retroalimentación como la coevaluación y evaluación grupal.

Proceder metodológico para el uso del Geogebra:

1. Seleccionar el contenido matemático teniendo en cuenta las particularidades de los estudiantes y elaborar una guía previa cuyo desarrollo garantice el trabajo con el asistente.

2. Concebir una guía de trabajo para la aplicación del contenido matemático, teniendo en cuenta:

- Objetivo.
- Medios a emplear.
- Indicaciones para el profesor.
- Actividades a realizar por los estudiantes.
- Orientaciones para la evaluación.

3. Implicar a los estudiantes en reflexiones metacognitivas del proceder utilizado como sustento de su futuro desempeño profesional.

Empleo del Geogebra en el tratamiento del contenido matemático según las situaciones típicas.

I. Conceptos y definiciones.

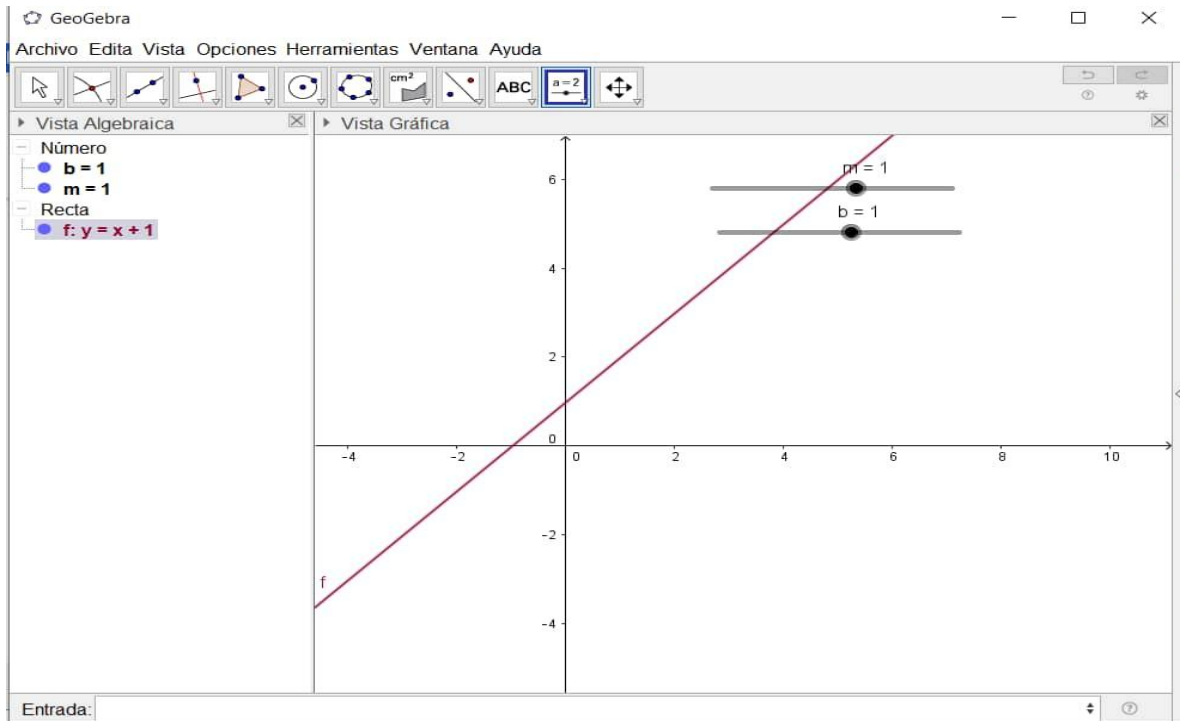
Ejemplo 1: (Funciones lineales $f(x) = mx + b$)

La situación consiste en analizar cómo afectan la pendiente (m) y el intercepto (b) a una función lineal.

Actividad con GeoGebra:

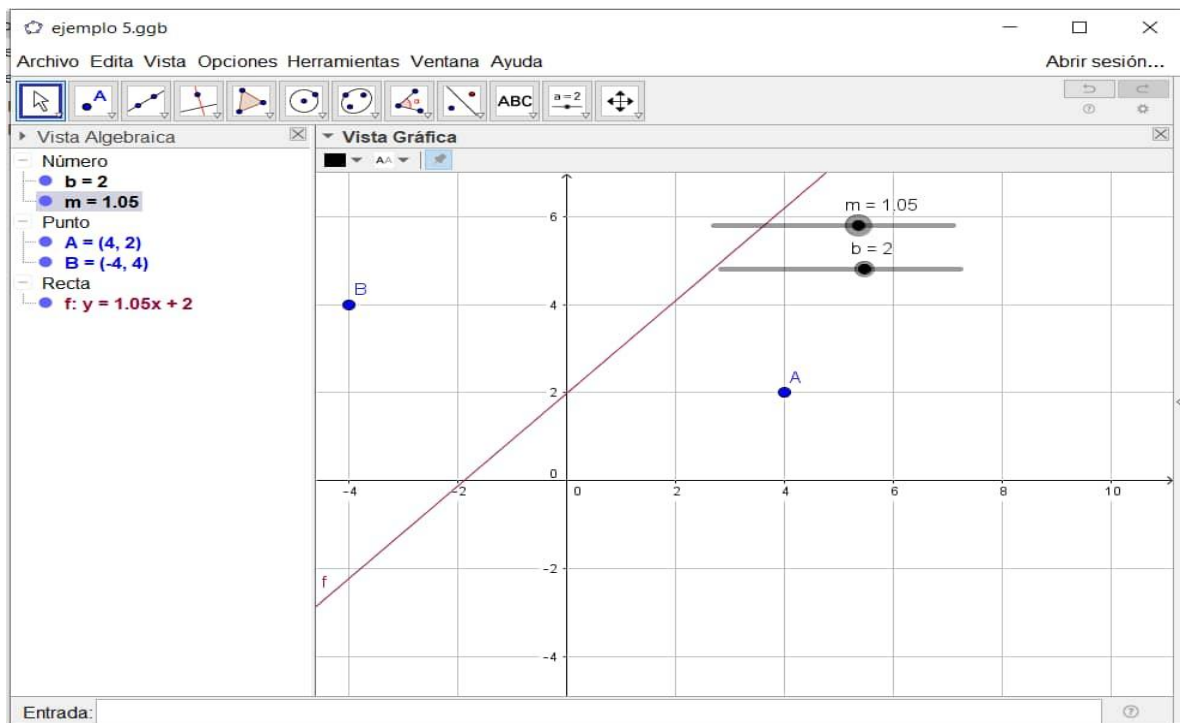
1. Crear deslizadores:
 - Usa Deslizador para m (rango: -5 a 5) y b (rango: -10 a 10).
 - Comportamientos clave:
 - $m=0$: Recta horizontal
 - $m \rightarrow \infty$: Recta vertical (discutir límites)
2. Ingresar función:
 - Escribe $y = mx + b$.
3. Sistematizar:

- Varía m : muestra rectas ascendentes ($m > 0$), descendentes ($m < 0$), y horizontales ($m = 0$).
- Varía b : desplaza la recta verticalmente.



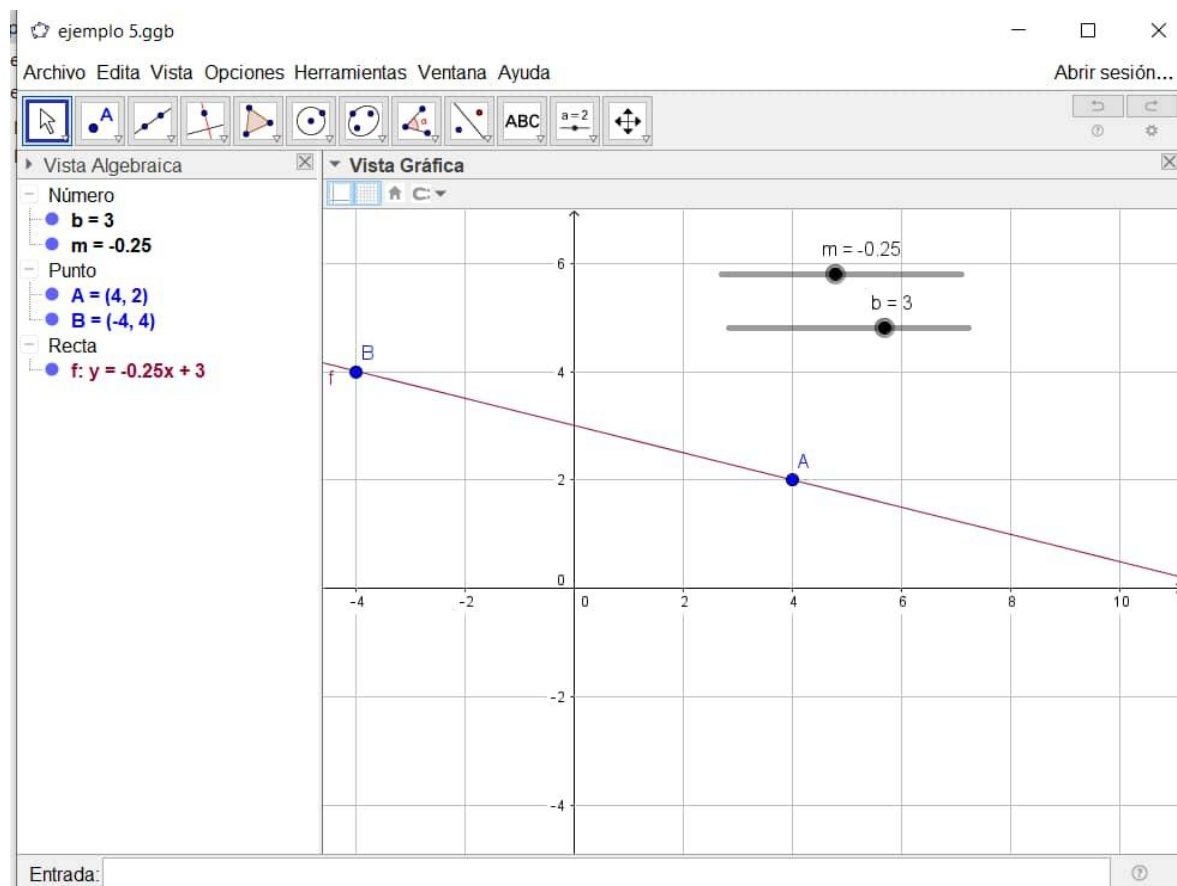
4. Sistematizar:

- Varía m : muestra rectas ascendentes ($m > 0$), descendentes ($m < 0$), y horizontales ($m = 0$).
- Varía b : desplaza la recta verticalmente.



5. Realizar la siguiente actividad:

- Pide a los estudiantes que ajusten m y b para que la recta pase por dos puntos dados.



Puede resumirse que:

- GeoGebra transforma parámetros abstractos en cambios visuales intuitivos.
- Los estudiantes comprenden intuitivamente estos parámetros clave de funciones lineales.

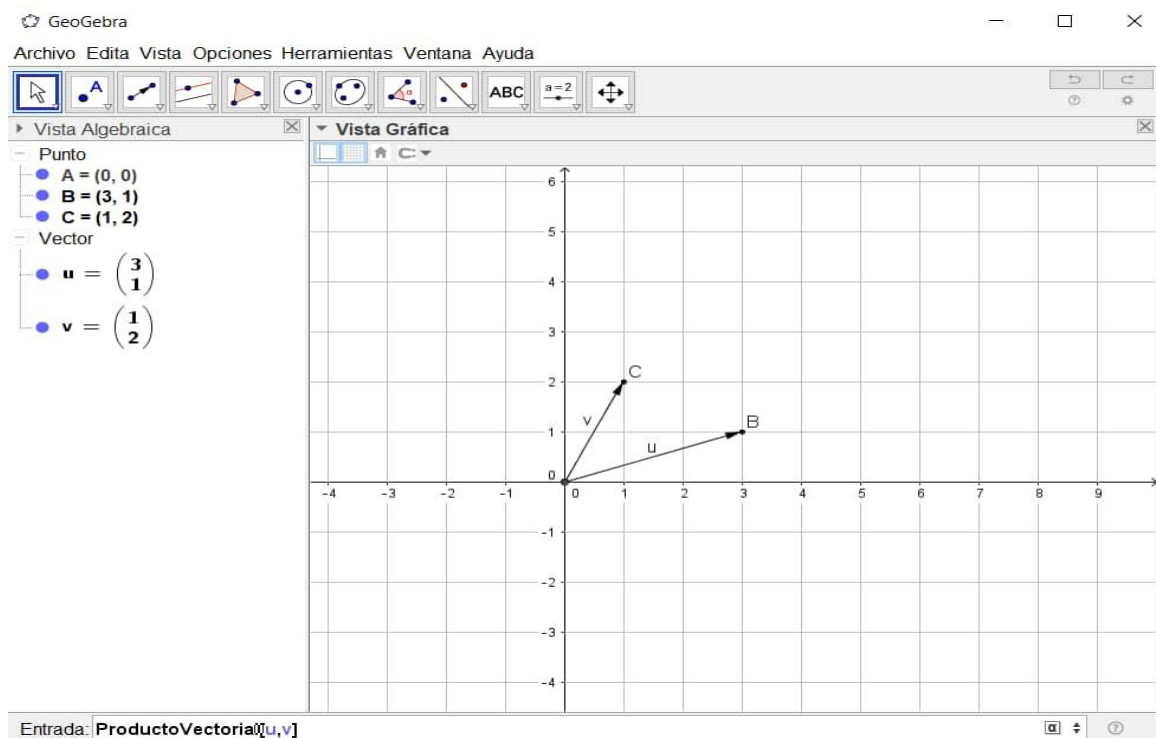
Ejemplo 2: (Producto vectorial y su interpretación geométrica).

La situación consiste en identificar que el producto vectorial es un vector cuyo módulo o longitud coincide con el valor del área del paralelogramo generado por los vectores.

Actividad con GeoGebra:

Definir vectores:

- Ingresar dos vectores en dos dimensiones: $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (1, 2)$.



1. Calcular producto vectorial:

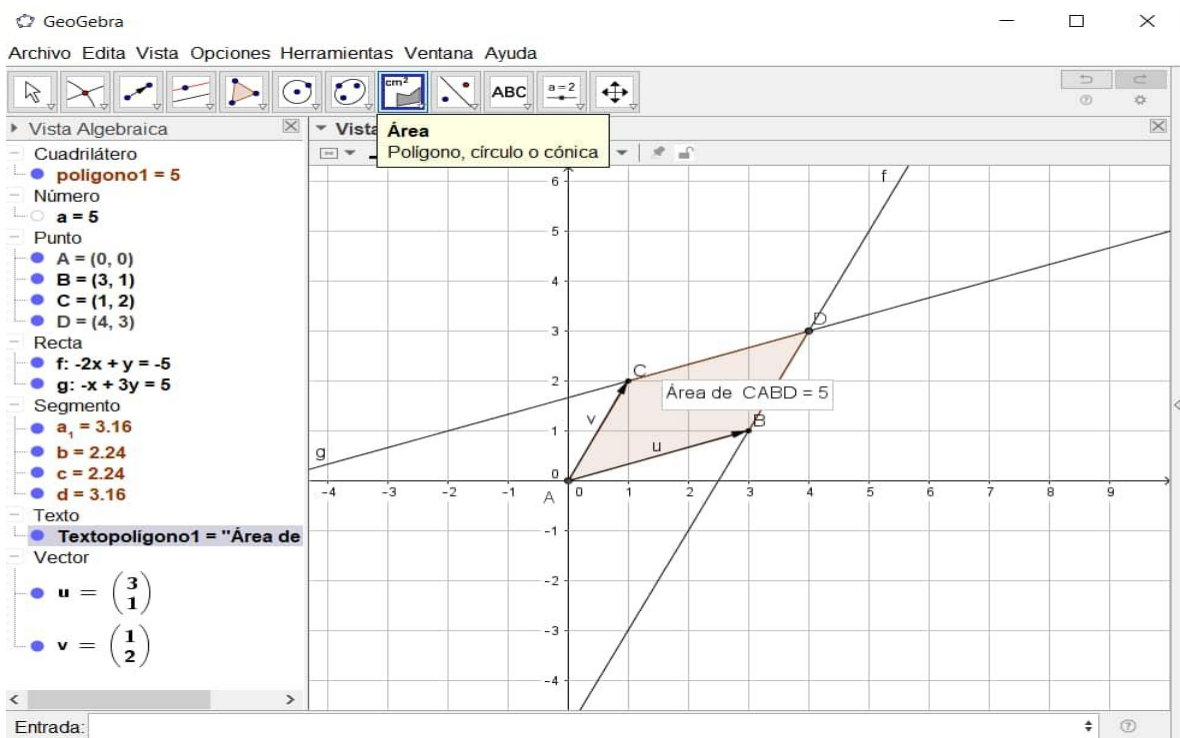
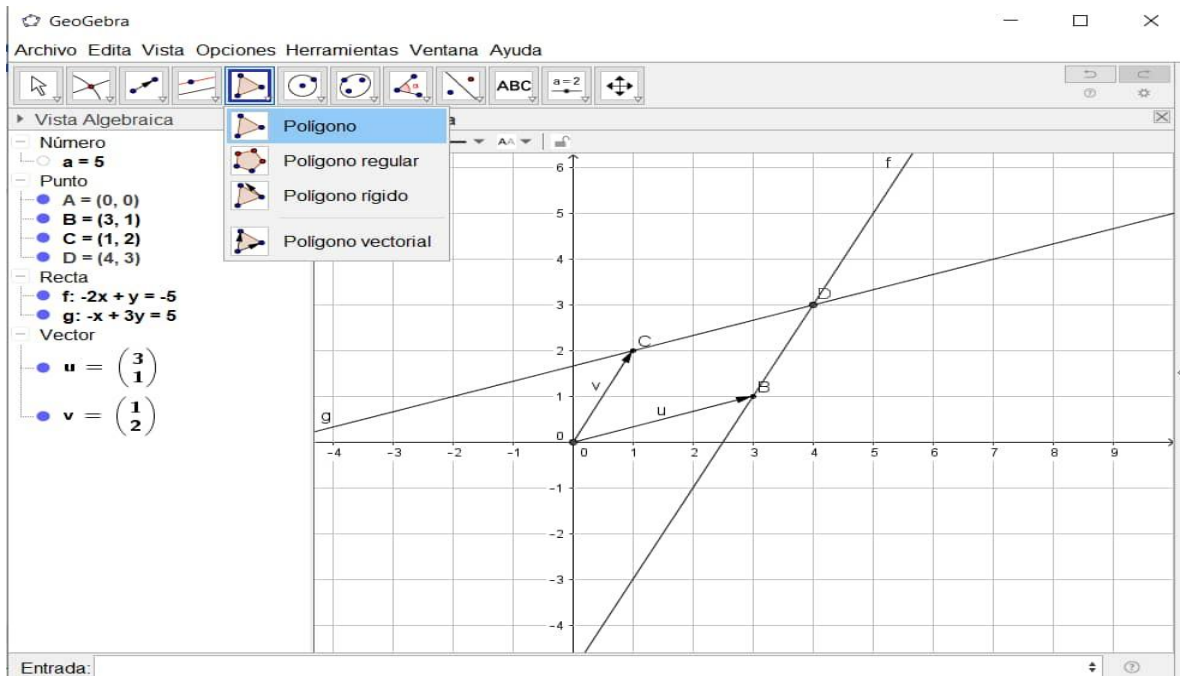
- Usa la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = |u_1v_2 - u_2v_1|$.
- En GeoGebra, escribe: `ProductoVectorial[u, v]`.

2. Graficar paralelogramo:

- Trazar paralelas a los vectores que pasen por el extremo del otro.
- Utiliza la herramienta Intersección para hallar los vértices de la figura
- Dibuja paralelogramo con lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ utilizando la herramienta Polígono.

3. Comparar áreas:

- Mide el área del paralelogramo con Área y verifica que coincide con $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 5$.



5. Sistematizar:

- Varía las coordenadas de los vectores y repite los pasos anteriores.

Puede resumirse que:

- El módulo del producto vectorial cuantifica el "área generadora" de los vectores.
- Los estudiantes relacionan el concepto algebraico con su interpretación geométrica.

II. Teoremas y demostraciones

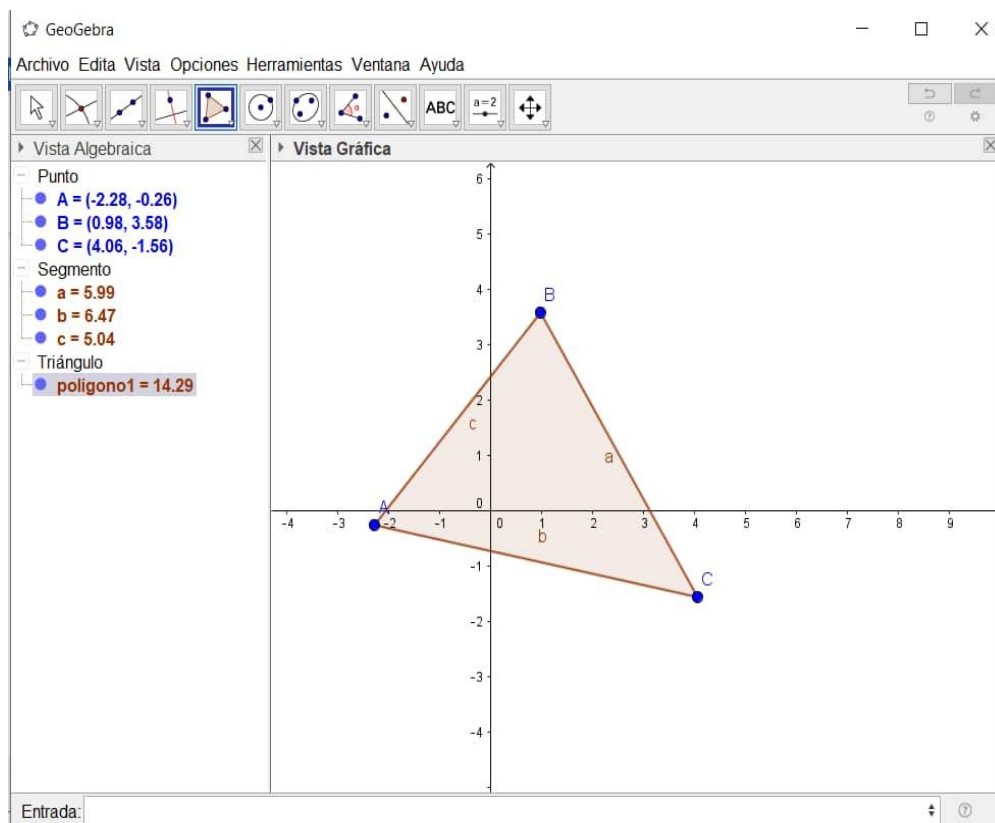
Ejemplo 3: (La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°)

La situación consiste en encontrar el teorema y la idea de la demostración)

Actividad con GeoGebra:

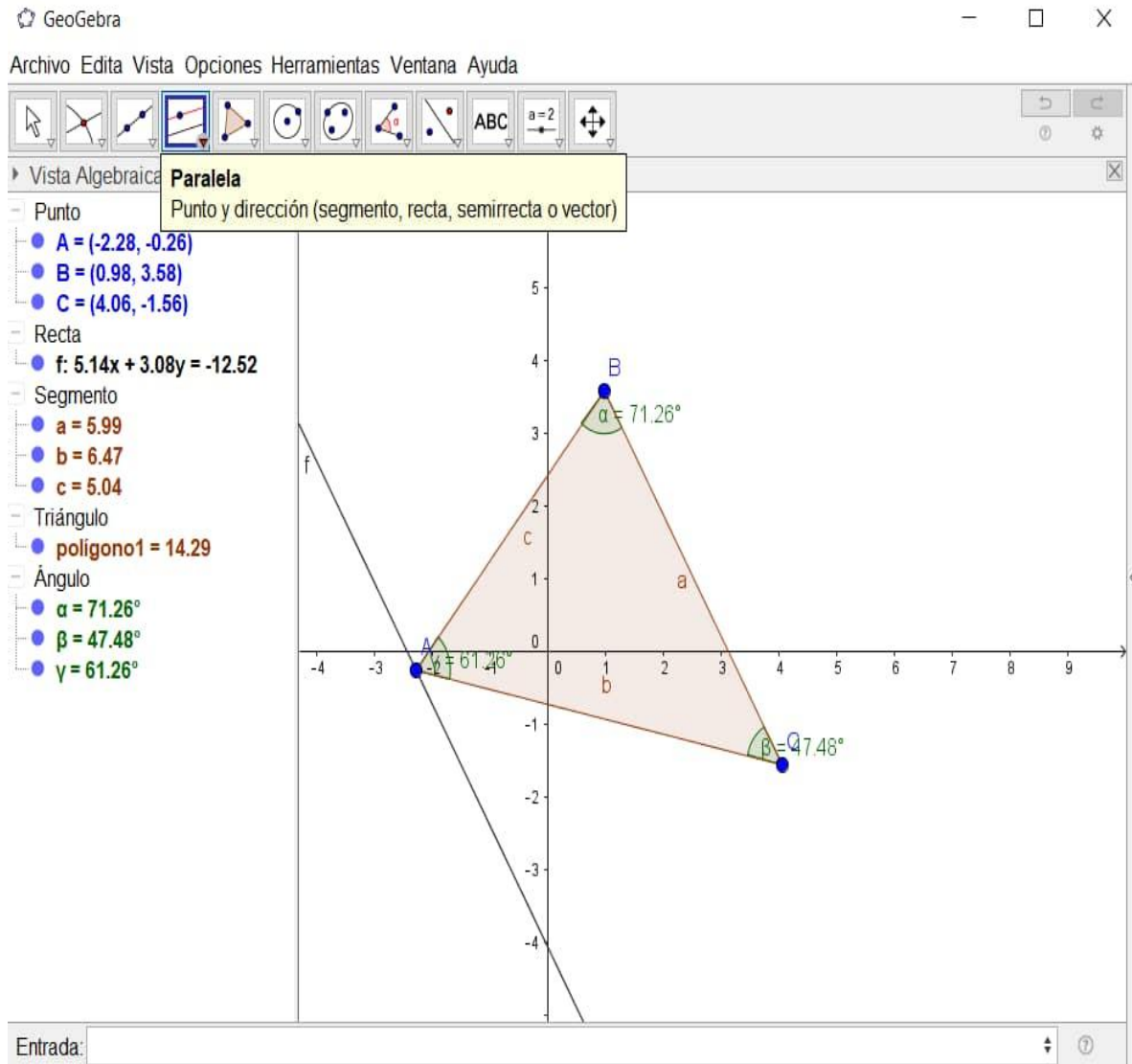
1. Construir triángulo ABC:

- Usa la herramienta Polígono para dibujar un triángulo cualquiera.



2. Herramientas. Medir ángulos:

- Selecciona Ángulo y haz clic en cada vértice para medir $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



3. Sumar ángulos:

- GeoGebra calcula automáticamente $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

4. Sistematizar:

- Varía el tipo de triángulo y repite los pasos anteriores.

5. Actividad:

- Pide a los estudiantes hacer una conjetura sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

6. Demostrar esa conjetura.

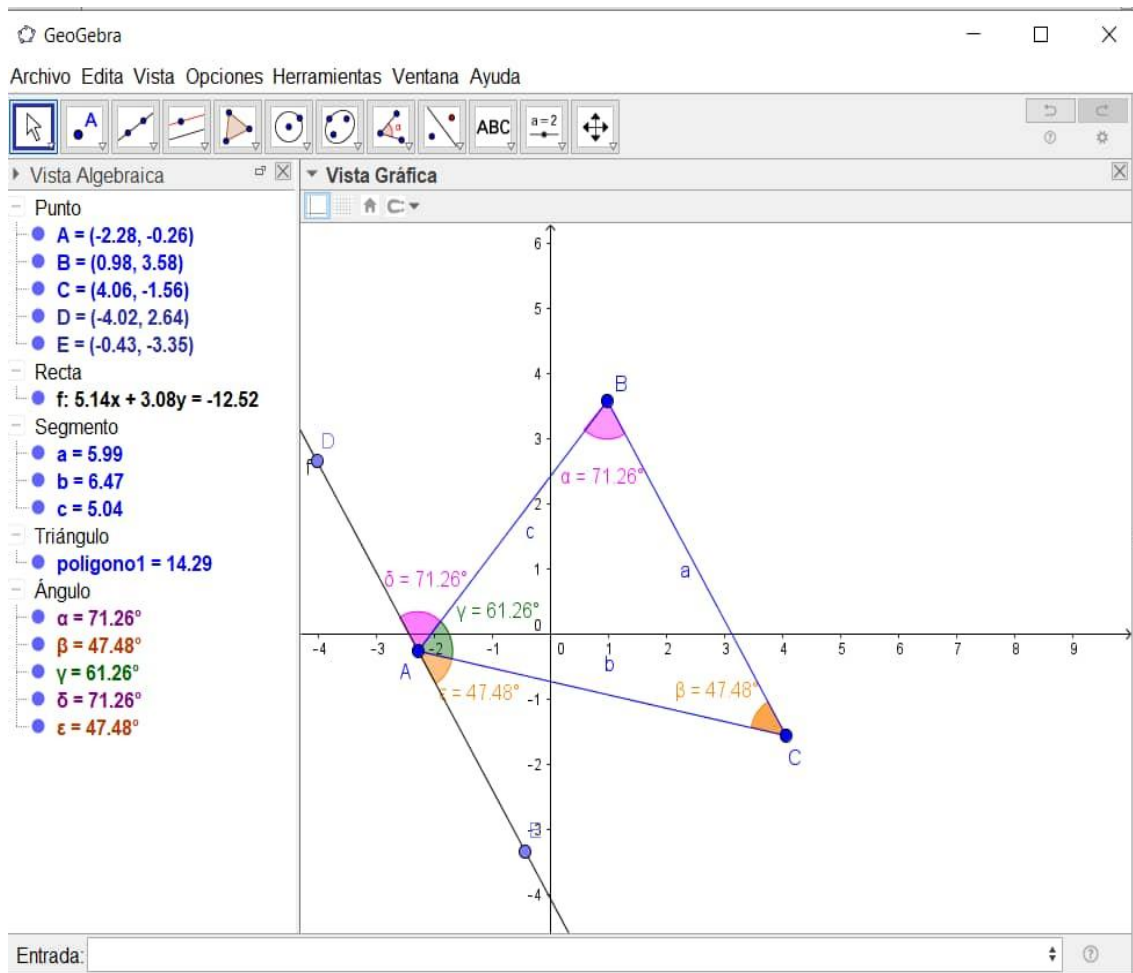
- Línea auxiliar. Dibujar paralela: Traza una recta paralela al lado BC que pase por A.

7. Visualización. Usar ángulos alternos:

- Usa "Ángulos alternos internos" para mostrar igualdades.
- Muestra que $\angle B = \angle DAB$ y $\angle C = \angle EAC$ (ángulos alternos internos).

8. Sumar ángulos:

- $\angle DAB + \angle EAC + \angle BAC = 180^\circ$ pues conforman el ángulo llano DAE.
- GeoGebra calcula automáticamente $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.



Puede resumirse que:

- La idea de la demostración se obtiene de realizar una construcción auxiliar y utilizar propiedades de los ángulos entre paralelas.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°

III. Ejercicios y problemas.

Ejemplo 4: (Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales)

Situación:

Dos ciclistas recorren trayectorias rectilíneas en una ciudad. Sus rutas están dadas por:

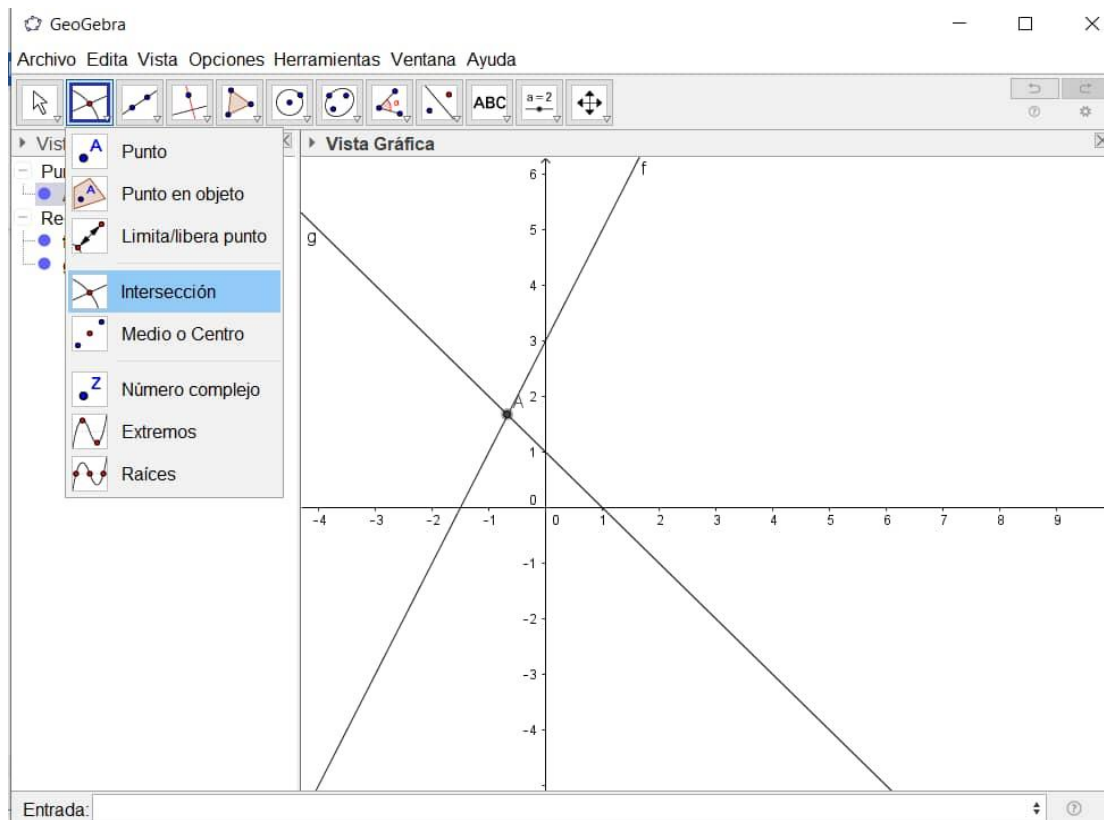
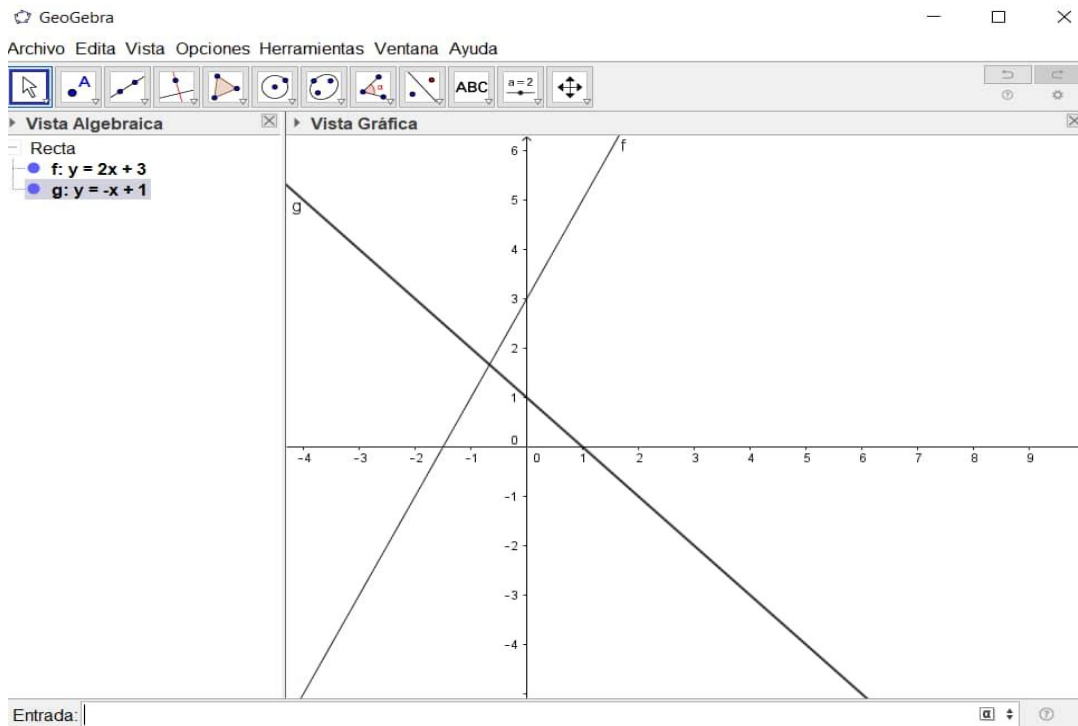
- Ciclista A: $y=2x+3$
- Ciclista B: $y=-x+1$

Pregunta:

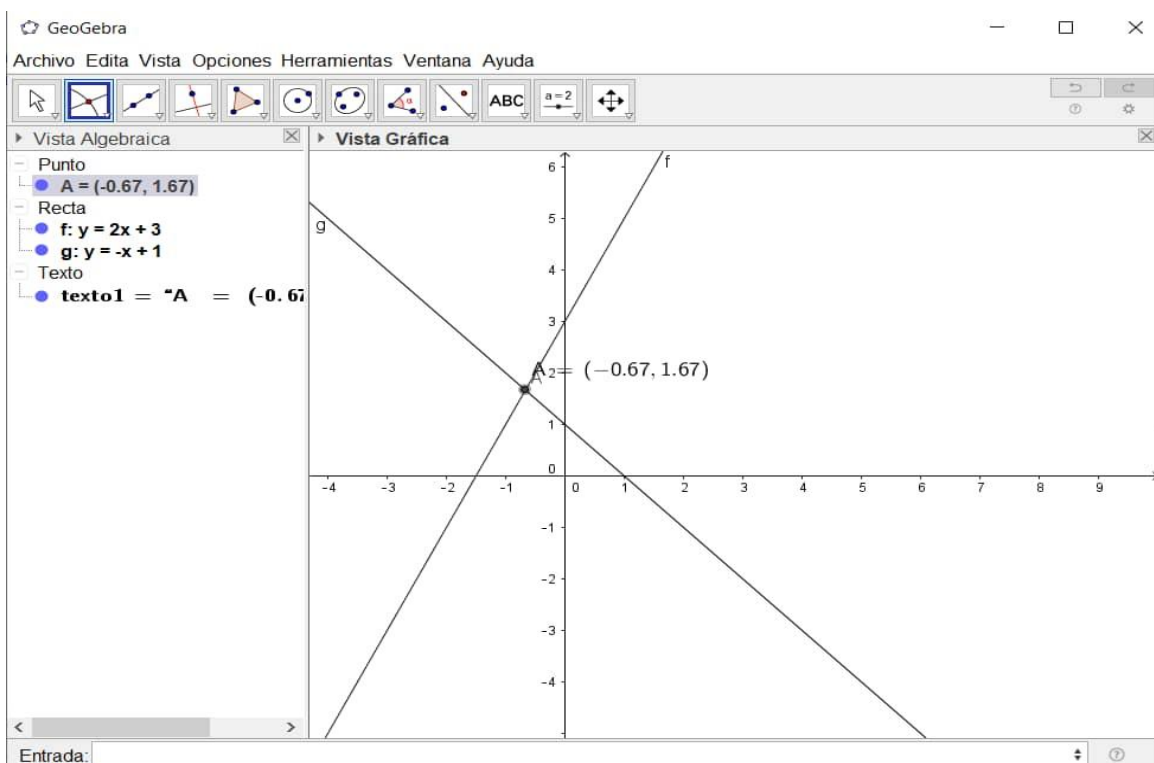
¿Se cruzarán las rutas de los ciclistas? Si es así, determina el punto de encuentro.

Actividad con GeoGebra:

1. Modelado matemático. Ingresar ecuaciones:
 - Abre GeoGebra y escribe ambas ecuaciones en la barra de entrada.
2. Análisis gráfico. Graficar rectas:
 - Observa las trayectorias en el plano cartesiano.
3. Interpretación física:
 - Si hay punto de cruce: "Los repartidores coincidirían en (x,y) a las t horas".
 - Si son paralelas: "Nunca se encontrarían".



4. Calcular intersección:
 - Usa la herramienta Intersección para marcar el punto donde se cruzan.
5. Interpretar resultado:
 - GeoGebra mostrará el punto $(-0.67, 1.67)$. Discute por qué esto significa que las rutas no coinciden exactamente (coordenadas no enteras), pero sí se cruzan en ese punto.



Ahora el profesor analizará con los estudiantes el procedimiento analítico para determinar la solución del sistema de dos ecuaciones lineales.

Puede resumirse que:

Este problema enseña a resolver sistemas de ecuaciones en contextos reales, destacando cómo las soluciones no siempre son "limpias". GeoGebra ayuda a convertir ecuaciones abstractas en decisiones logísticas reales.

Ejemplo 5: (Calcular el valor del área determinada por dos curvas en el plano)

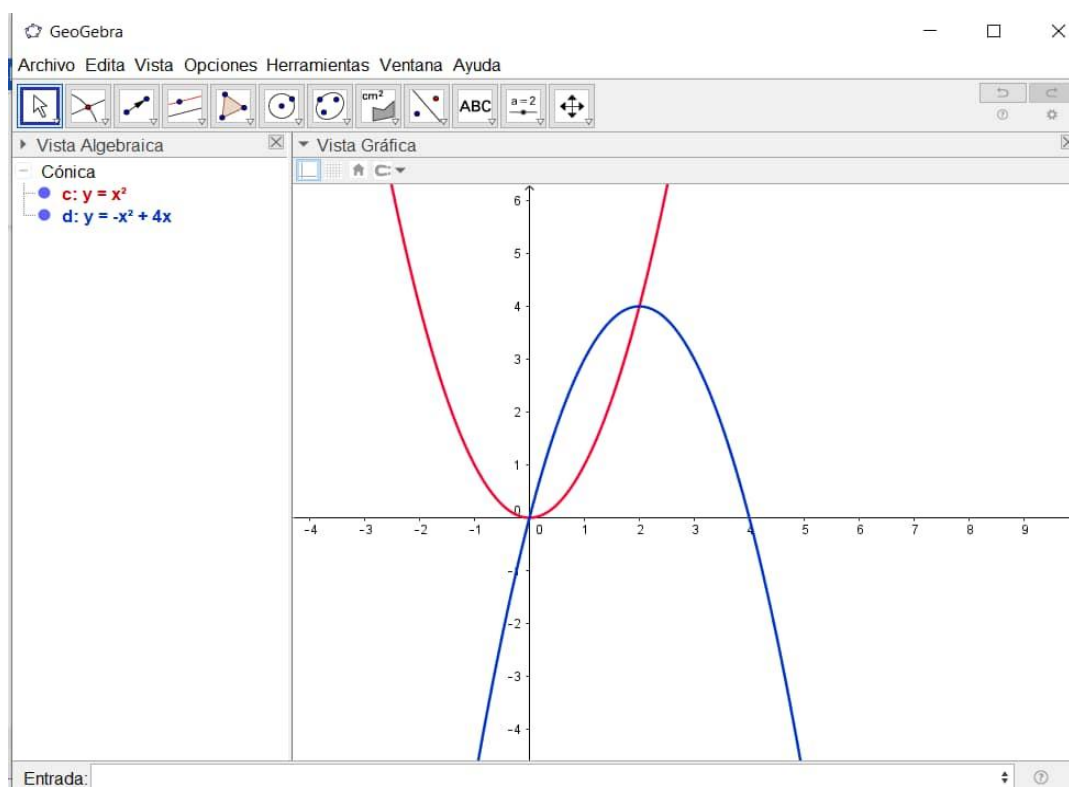
Situación:

Calcula el área determinada por las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$ en el intervalo $[0,2]$

Actividad con GeoGebra:

1. Graficar funciones:

➤ Ingresa $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$

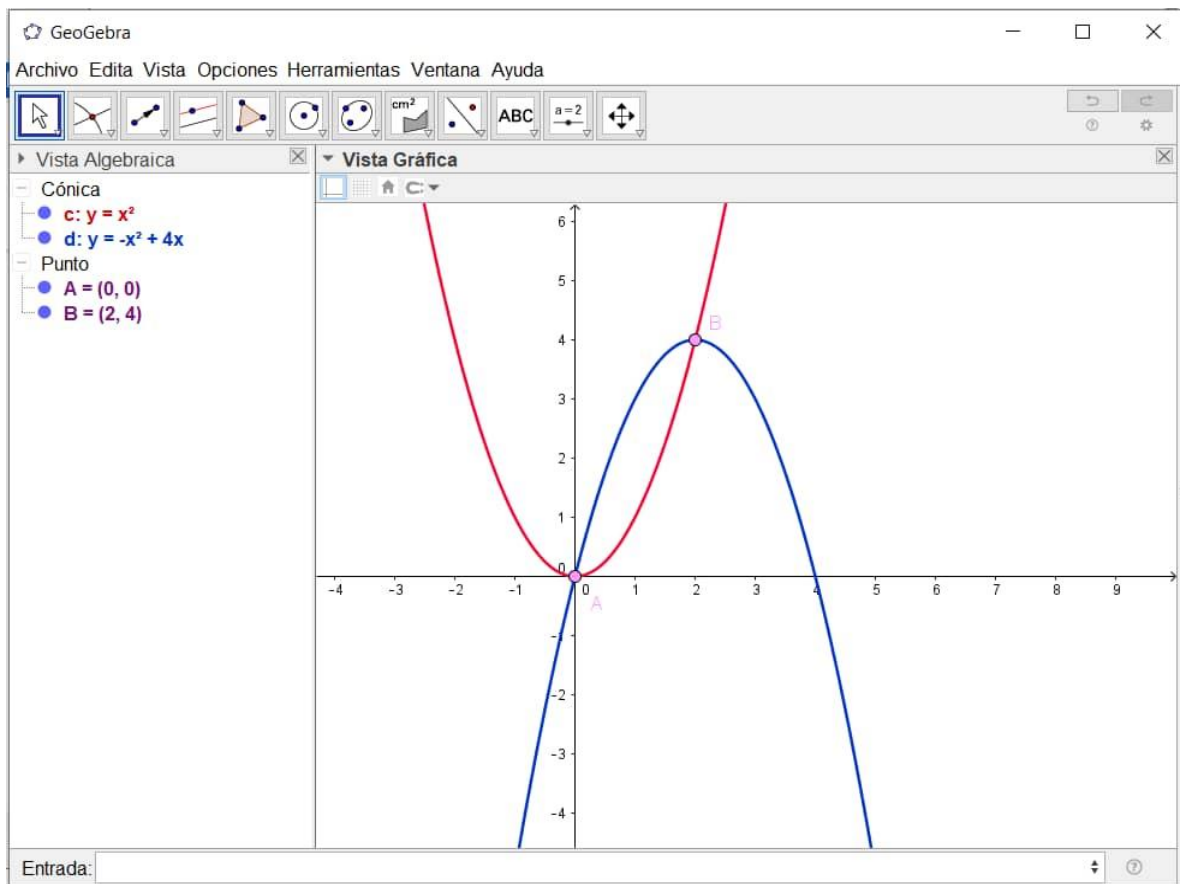


2. Hallar intersecciones y mostrar la región:

➤ Resuelve $x^2 = 4x - x^2 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$

(verificar con herramienta "Resolver").

➤ Usa Intersección para confirmar que se cortan en $x=0$ y $x=2$.



3. Calcular área. Integral definida:

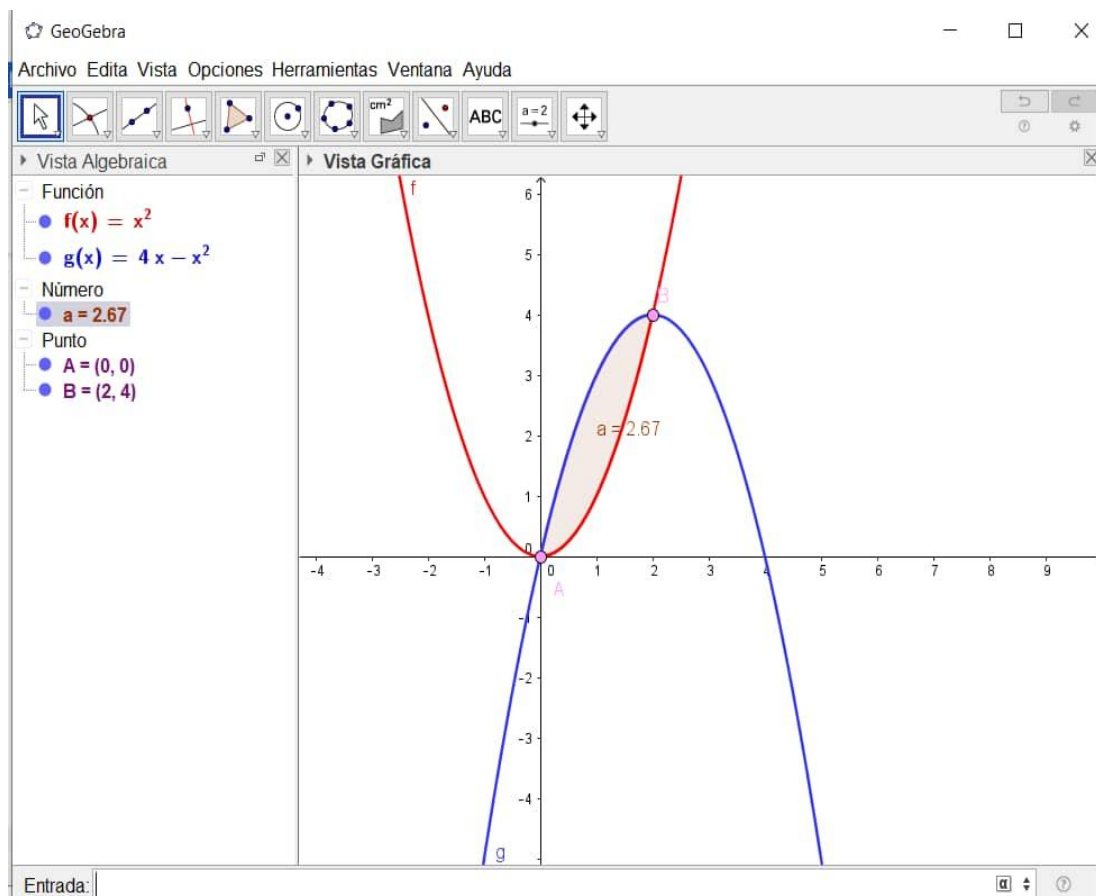
- Escribe $\text{IntegralEntre}[g, f, 0, 2]$. GeoGebra mostrará el área.

4. Resultado:

- Área $\approx 2.67 \text{ u}^2$.

5. Aplicación:

- "Este cálculo podría representar el terreno entre dos ríos en un mapa".



Puede resumirse que:

- Para calcular el área entre dos curvas es conveniente representar la región del plano utilizando las propiedades de las funciones y determinar los puntos del plano donde se cortan esas curvas
- Plantear la integral definida como área entre curvas.

A continuación se presentan ejemplos de medios elaborados con el uso del software Geogebra.

El grupo de teoremas de Pitágoras

Guía de Trabajo	
Título:	Ejercicio 32 Capítulo 1 Epígrafe 6 Libro de texto Matemática 9no Grado.

Objetivo:	Resolver problemas matemáticos en los que se aplique el grupo de teorema de Pitágoras con la utilización del asistente Geogebra.
Medios a emplear:	Computadora, el programa GeoGebra. Libro de Texto de 9no Grado. Indicaciones para el profesor: Como aseguramiento al empleo de la guía el profesor debe reactivar las definiciones del grupo de teoremas de Pitágoras. Se sugiere que esta actividad se realice en el Laboratorio Informática y por parejas de estudiantes.
Actividades a realizar por los estudiantes:	Realice el ejercicio 32 Cap1 Epígrafe 6 del libro de texto 9no Grado Sea M un punto cualquiera de la altura $\overline{AH}$ de un triángulo ABC. Demuestra que $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BM}^2$. A partir del ejercicio anterior realice las siguientes acciones en el asistente matemático: Cree un triángulo ABC y trácele la altura AH. Cree un punto M tal que $M \in AH$ y trace los segmentos CM y BM Mida la longitud de los segmentos AC, AB, CM y BM. Establezca la variable p con el valor $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ Establezca la variable q con el valor $\overline{CM}^2 - \overline{BM}^2$ Inserte dos textos que contengan $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 =$, $\overline{CM}^2 - \overline{BM}^2 =$ y los resultados de las restas. Modifique las posiciones de los vértices del triángulo ABC y

	analice qué relación existe entre los valores de las variables p y q. Verifique en el protocolo de construcción los pasos realizados. ¿Qué importancia encuentras en utilizar el asistente matemático para ilustrar la veracidad de la demostración antes presentada? Indaga en tu centro de práctica laboral si es posible la utilización del Asistente en la impartición de este contenido.
Orientaciones para la evaluación:	Se sugiere que el profesor tenga en cuenta la participación de los estudiantes en la actividad y verifique que estos hayan elaborado correctamente la figura utilizando el asistente.

Función lineal

Guía de Trabajo	
Título:	Función lineal
Objetivo:	Caracterizar la función lineal $f(x) = ax + b$
Medios a emplear:	Computadora, el programa GeoGebra
Indicaciones para el profesor:	El aseguramiento de la actividad debe realizarse sobre la base de la reactivación del concepto de función. Además, se deben reactivar los conceptos de dominio, monotonía, ceros e interceptos con los ejes de coordenadas. Se sugiere que esta actividad se realice en el Laboratorio de Informática y por parejas de estudiantes.

Actividades a realizar por los estudiantes:	1. Inicia un nuevo documento con el asistente Geogebra, muestra los ejes de coordenadas en la vista gráfica y céntralos. 2. Inserta dos deslizadores con nombres a y b, establece para ellos un rango entre -5 y 5 un incremento de 0.01. Ubícalos en la esquina superior izquierda de la vista gráfica. 3. Introduce en la barra de entrada el siguiente texto: $f(x)=ax + b$. Observa los cambios que ocurren en la representación gráfica. 4. ¿Qué tipo de función ha sido representada? 5. Usa el deslizador a y observa qué ocurre con la representación cuando el valor de a es: a. Negativo. b. Cero. c. Positivo. 6. Haya los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. 7. Usa el deslizador b y observa qué ocurre con la representación y los puntos de intersección con los ejes de coordenadas cuando el valor de b aumenta o disminuye: 8. ¿Cuál es el dominio de la función? 9. ¿Cuál es la imagen de la función cuando el valor de a es: a. ¿Distinto de cero? b. ¿Igual a cero? 10. ¿En el caso de que a es cero qué tipo de función lineal se

	obtiene?
Orientaciones para la evaluación:	Se sugiere que el profesor indique a los estudiantes la confección de un cuadro comparativo donde se escriban todas las propiedades y representaciones de la función $f(x) = ax + b$ teniendo en cuenta que los valores de sus parámetros sean: • Negativos. • Cero: ¿Qué función se obtiene en este caso? Positivos.

Función de proporcionalidad inversa

Guía de Trabajo	
Título:	Función de proporcionalidad inversa
Objetivo:	Caracterizar la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{c}{ax + b}$
Medios a emplear:	Computadora, el programa GeoGebra
Indicaciones para el profesor:	El aseguramiento de la actividad debe realizarse sobre la base de la reactivación del concepto de función. Además, se deben reactivar los conceptos de dominio, rango, monotonía, ceros, paridad, interceptos con los ejes coordenados y asíntotas. Se sugiere que esta actividad se realice en el Laboratorio de Informática y por parejas de estudiantes.
Actividades a realizar por los estudiantes:	En el archivo Geogebra aparece la representación de la función $f(x) = \frac{c}{ax + b}$ Realiza un análisis sobre la variación de la representación gráfica a medida que varían los parámetros a, b y c interactuando con cada uno de los deslizadores. 1- Desplaza el deslizador que corresponde al parámetro a y observa qué ocurre con la representación cuando este es: • Negativo.

	• Cero: ¿Qué función resulta en este caso? • Positivo. 2- Desplaza el deslizador que corresponde al parámetro b y analiza cómo se desplaza la representación de la función a medida que aumenta o disminuye el valor de dicho parámetro. 3- Desplaza el deslizador que corresponde al parámetro c y observa qué ocurre con la representación cuando este es: • Negativo. • Cero: ¿Qué función resulta en este caso? • Positivo. 4- Observa la variación del gráfico de la función desplazando libremente los tres deslizadores e identifica: • Valores para los cuales está definida la función. • Ecuación de la asíntota. ¿Cuál parámetro define si la función intercepta los ejes de coordenadas?
Orientaciones para la evaluación:	Se sugiere que el profesor indique a los estudiantes la presentación de un cuadro comparativo donde se escriban todas las propiedades de la función teniendo en cuenta que los valores de sus parámetros sean: • Negativos. • Cero: ¿Qué función resulta en este caso? • Positivos

Análisis de la representación gráfica de una función cúbica

Guía de Trabajo	
Título:	Análisis de la representación gráfica de una función cúbica

Objetivo:	Caracterizar la representación gráfica de la función cúbica de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a partir del cálculo diferencial
Medios a emplear:	Computadora, el programa GeoGebra
Indicaciones para el profesor:	El aseguramiento de la actividad debe realizarse sobre la base de la reactivación del concepto de función, del cálculo diferencial utilizando la fórmula $(mx^n)' = (mn)x^{n-1}$. Además, se deben reactivar los conceptos de máximo, mínimo, puntos de inflexión, concavidad, convexidad, interceptos con los ejes coordenados y raíces de un polinomio. Se sugiere que esta actividad se realice en el Laboratorio de Informática y por parejas de estudiantes.
Actividades a realizar por los estudiantes:	En el archivo Geogebra aparece la representación de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Realiza un análisis de como varía la representación gráfica a medida que varían los parámetros a, b, c y d interactuando con cada uno de los deslizadores. 1- Desplaza los deslizadores y observa qué ocurre con la representación cuando estos son: Negativos. Cero: ¿Qué función se obtiene en este caso? Positivos. 2- Identifica visualmente en la función los siguientes elementos: Máximos. Mínimos. Puntos de inflexión. Secciones de Convexidad y Concavidad. 3- Selecciona el control que muestra la Primera Derivada y analiza de la misma los siguientes elementos: Tipo de función. Raíces. ¿Para qué dominio su valor es positivo o negativo? 4- Selecciona el control que muestra las Raíces de la Primera derivada y analiza la relación existente entre estas y la representación gráfica de la función. ¿Cómo a partir de la representación se puede determinar si es un máximo o mínimo? 5- Selecciona el control que muestra la Segunda Derivada y

	analiza de la misma los siguientes elementos: Tipo de función. Raíces. ¿Para qué dominio su valor es positivo o negativo? 6- Selecciona el control que muestra las Raíces de la Segunda derivada y analiza la relación existente entre estas y la representación gráfica de la función. ¿Cómo a partir de la representación de la segunda derivada se puede determinar si la función es convexa o cóncava en ese dominio? Si evaluamos las raíces de la primera derivada en la segunda qué relación se puede observar entre estos y la determinación de los máximos y mínimos de la función. 7- Continúa desplazando libremente los deslizadores y observa como varía la representación gráfica de las derivadas y sus raíces.
Orientaciones para la evaluación:	Se sugiere que el profesor indique a los estudiantes la presentación de un cuadro comparativo donde se escriban según la representación de la primera y segunda derivada qué elementos se pueden obtener para la realización de la representación gráfica de una función cúbica con la formula $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

IX. LA EVALUACIÓN DESDE UNA CONCEPCIÓN INTEGRADORA

Para la concepción de la evaluación integradora se parte de los fundamentos ofrecidos en los demás epígrafes de esta obra sobre la evaluación como proceso y resultado, sus funciones, no obstante, en este epígrafe se ofrecerán fundamentos por la necesidad de una concepción integradora y se parte de compartir que:

Es posible concebir la evaluación del aprendizaje como un componente del proceso de enseñanza-aprendizaje, dirigido a valorar el logro de los objetivos comprobando la eficacia del proceso y la calidad de los resultados del aprendizaje. Con otras palabras, al evaluar se analizan los cambios cualitativos operados en el estudiante sistemáticamente en su rendimiento académico y en el desarrollo de su personalidad, en relación con el modelo ideal concretado en los objetivos, lo que permite comprobar la efectividad del proceso (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.149).

La asimilación del contenido logrado por los estudiantes en cada medición, en los diferentes niveles de sistematicidad de los objetivos (evaluación sistemática, parcial y final) permite formular un juicio que exprese el rendimiento alcanzado por cada estudiante, en un momento determinado del proceso (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 15).

En cuanto a las funciones de la evaluación es de gran relevancia la instructiva en la asimilación de lo nuevo por aprender, pues mediante las preguntas en clase y las actividades evaluativas realizadas se contribuye a que los estudiantes sistematicen los contenidos e incrementen la solidez de estos, donde deben constituir valiosas experiencias de aprendizaje la reflexión sobre los errores cometidos (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

La observación continua, sistemática y diaria de los estudiantes en el desempeño de las tareas docentes, permite a la función diagnóstica obtener información desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo, acerca del cumplimiento de los objetivos propuestos por el profesor para, paulatinamente determinar si es necesario la introducción de correcciones en su estrategia de trabajo, como: variar el método de enseñanza, profundizar en las explicaciones, plantear nuevas actividades para la ejercitación, profundización, sistematización y aplicación de los conocimientos, organizar el trabajo diferenciado de otra manera, estructurar pequeños grupos para el trabajo correctivo, entre otros.

La evaluación cumple su función de desarrollo si las tareas para las actividades evaluativas comprueban y contribuyen a estimular en el estudiante el desarrollo del pensamiento independiente y creador, la atención y la memoria racional, así como las habilidades: comparar, procesar la información, reflexionar y seleccionar lo esencial; hacer conclusiones y arribar a generalizaciones, para que el alumno escale a un peldaño superior, sienta satisfacción por haber logrado éxito en la tarea asignada, se requiere que la exigencia de la pregunta a responder estimule el desarrollo de sus capacidades, y exija trabajar en la zona de desarrollo próximo del estudiante, para que transite a niveles de asimilación más elevados y pueda transferir lo aprendido a nuevas situaciones (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Durante el desarrollo del proceso, el control puede manifestarse mediante el elogio, el estímulo, la exhortación y la crítica que el profesor ofrece a los estudiantes, con el objetivo de corregir, ajustar y perfeccionar la ejecución de operaciones y acciones en el desarrollo de una determinada tarea, por ejemplo: revisa de nuevo la respuesta, por qué no lo amplías más, muy buena solución, estás trabajando correctamente, trata de buscar una vía de solución más corta, para cual debe observarse el rigor y la completitud de la solución, el orden lógico (coherencia), la organización, racionalidad y limpieza en la representación de la solución, la cohesión de las ideas y correcta utilización de la terminología y simbología matemáticas, la ortografía, entre otros indicadores (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Es ineludible precisar que para la evaluación del aprendizaje de la asignatura debe tenerse en cuenta además, del dominio del sistema de conocimientos y el desarrollo de las habilidades, al menos en las evaluaciones sistemáticas de los estudiantes, aspectos educativos como: atención e interés, responsabilidad, perseverancia e independencia en el cumplimiento de las tareas docentes, emisión de juicios y razonamientos mediante una adecuada expresión oral, ayuda a otros compañeros, ser justo en la autoevaluación y en la coevaluación.

Es necesario que el profesor en la clase de Matemática propicie el intercambio de criterios al solucionar tareas, al resolver ejercicios y problemas, a partir de una comunicación adecuada que permita la autovaloración sistemática del trabajo realizado y el ejercicio de la crítica y la autocrítica; se requiere que los estudiantes realicen su autoevaluación para desarrollar su independencia, autoconciencia, y autovaloración, comparando los resultados que han obtenido, en la resolución de cualquier tipo de tarea, con los que debían haber logrado. El profesor, según las características de sus estudiantes, debe mostrar alta sensibilidad y tacto pedagógico en el tratamiento diferenciado, creando un clima de comprensión y ayuda mutua. De esa forma se fortalece la formación de valores morales como la responsabilidad, la honestidad, la honradez y la solidaridad e debe instrumentar en evaluaciones frecuentes como preguntas orales, discusión de tareas de estudio individual y extraclase, en trabajos prácticos e investigativos, en presentación de informes o ponencias y en seminarios de distintos tipos (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.156).

Los autores defienden que la evaluación como vía de retroalimentación del proceso y de estimulación de la actividad independiente de los estudiantes,

posibilita la valoración del nivel de logros alcanzados, de acuerdo con los objetivos propuestos e incluye las normas de comportamiento, cualidades que se expresan, actitudes que se manifiestan junto a los aspectos instructivos y desarrolladores; propicia también la autoevaluación y la evaluación, para lo cual se debe orientar acerca de los objetivos de la evaluación, cómo y cuándo se van a evaluar, qué criterios o indicadores se van a utilizar.

Los instrumentos de evaluación se elaborarán a partir de estructurar ejercicios, problemas y tareas docentes con las preguntas e incisos con los contenidos esenciales y para la aplicación integrada de los contenidos, se pueden utilizar como vías: preguntas orales, preguntas escritas, tareas para la casa o tareas extraclase, revisión de libretas y cuadernos de trabajo, observación del desempeño de los estudiantes en la clase o en otras actividades programadas, trabajos investigativos, tarea integradora, trabajos prácticos, ejercicios interactivos con el software educativo (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

La evaluación integradora es un proceso progresivo de observación y análisis de las transformaciones sistemáticas del desempeño, mediante la autogestión del aprendizaje con carácter integrador y tiene gran importancia para potenciar las relaciones interpersonales, la elaboración de ideas, asumir posiciones, el trabajo en equipos, la dinámica para la reflexión y el debate; como parte de la creatividad de los estudiantes. (Fernández, Jerez y Rodríguez, 2020). Además, activa las motivaciones, las cuales promueven el sentido de por qué y para qué aprender, así como la autoevaluación que el estudiante hace de lo que se le enseña y aprende (Alfonso y Valladares, 2019).

Según Alfonso y Valladares (2019), la evaluación integradora debe concebir actividades y tareas curriculares que ofrezcan a los estudiantes diferentes vías de acceso a la información, de integración y generalización de los aprendizajes; la autoevaluación desde el grupo al que pertenecen.

“La evaluación integradora del aprendizaje de la Matemática se manifiesta en tareas docentes o ejercicios para las evaluaciones sistemáticas, parciales o finales

que comprueban los diferentes niveles de profundidad de los objetivos, mediante la aplicación integrada del contenido estudiado” (Arnaiz, *et al.*, 2018, p. 2).

Los autores de este trabajo consideran como necesario para la evaluación integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática que, se deben evaluar los procesos cognitivos, afectivos y valorativos y que debe planificarse, ejecutarse y controlarse, por lo cual adicionan a la definición anterior, el empleo de medios, formas, métodos y procedimientos, la autoevaluación y la reflexión y el debate para determinar las potencialidades y limitaciones y las acciones para la elevación de los resultados.

En consideración a lo anterior, los autores definen que, la evaluación integradora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se manifiesta en tareas docentes o ejercicios para las evaluaciones sistemáticas, parciales o finales que comprueban los diferentes niveles de profundidad de los objetivos, mediante la aplicación integrada del contenido estudiado; con el empleo de medios, formas, métodos y procedimientos que propicien la autogestión del conocimiento, la autoevaluación y la reflexión y el debate para determinar las potencialidades y limitaciones y las acciones para la elevación de los resultados.

Igualmente proponen procedimientos metodológicos que parten de una concepción de evaluación integradora, que incluye las dos esferas de la personalidad medibles en el desempeño del estudiante, mediante la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, lo que hace imprescindible la interdisciplinariedad en cada nivel de educación y la utilización de las técnicas de la información y las comunicaciones.

1. Planificación

Procedimientos:

- Formular los objetivos de la asignatura, unidad y clase de forma que permitan el desarrollo de habilidades generalizadas de la Matemática, habilidades intelectuales, los procesos afectivos y comunicativos que contribuyan a la solución de los problemas de la vida.

- Seleccionar el contenido de manera que se garantice su vinculación con la vida y con otras asignaturas del nivel educativo, existiendo una lógica y coherente relación entre lo desarrollador y lo educativo.
- Determinar los nodos interdisciplinarios con otras asignaturas o disciplinas.
- Determinar cómo contribuir desde esos nodos interdisciplinarios a los objetivos del grado y nivel.
- Dosificar el contenido de manera que se conciba tiempo suficiente dentro del sistema que se trate (clase, unidad, asignatura) para ejercitar su aplicación integrada a la solución de ejercicios y problemas.
- Diseñar ejercicios, problemas y tareas docentes que propicien la integración del contenido y la elevación gradual del nivel de complejidad, que garanticen la atención diferenciada de los estudiantes para que todos puedan estar en posición de éxito, según sus características.
- Seleccionar métodos y el estilo de comunicación que posibiliten el trabajo independiente, la investigación, la autogestión del conocimiento, el fortalecimiento de los factores afectivos y actitudinales.
- Elegir recursos didácticos que posibiliten una correcta motivación y orientación hacia el objetivo de la actividad para que los estudiantes construyan el conocimiento mediante la búsqueda de información en diversas fuentes.
- Diseñar el instrumento de la evaluación integradora, donde la norma y clave de calificación incluya parámetros o indicadores de calificación, estableciendo un puntaje para cada elemento del conocimiento correctamente utilizado para el cumplimiento de los objetivos y se valore el desarrollo de los procesos afectivos y comunicativos.

2. Ejecución

Procedimientos:

- Utilizar métodos para la apropiación de conceptos, proposiciones y procedimientos, mediante el trabajo individual o grupal que permitan la relación entre los nuevos conocimientos con los que ya poseen los estudiantes, con sus intereses y motivos para que se apliquen integradamente los contenidos y se contribuya al desarrollo de los procesos afectivos y comunicativos.
- Emplear métodos mediante procedimientos heurísticos como los principios de analogía, reducción, inducción y generalización, entre otros; igualmente reglas y estrategias heurísticas con un estilo de comunicación democrático, en el que las preguntas e impulsos didácticos impliquen la necesidad de analizar, sintetizar, abstraerse, comparar, identificar, ejemplificar, clasificar, definir y generalizar conceptos; además de transformar juicios y demostrar proposiciones matemáticas, entre otras operaciones lógicas.
- Recurrir a un estilo de comunicación con impulsos didácticos que provoquen la búsqueda de varias vías de solución, la elaboración de ideas, asumir posiciones, el planteamiento de interrogantes y la argumentación de puntos de vista; lo que propiciará la expresión de emociones, estados de ánimo y sentimientos y el análisis de las causas de los errores.
- Elegir o diseñar ejercicios, problemas y tareas docentes para las evaluaciones sistemáticas, parciales o finales que comprueban los diferentes niveles de profundidad de los objetivos, mediante la aplicación integrada del contenido estudiado y que cumplan todas las funciones de la evaluación.
- Aplicar un instrumento de evaluación, que sea adecuado y pertinente, en correspondencia con el diagnóstico y los objetivos de la asignatura, que permita evidenciar el dominio de los contenidos fundamentales con los niveles de integración de las asignaturas y con los componentes del proceso formativo.

- Favorecer la autovaloración, que se autocorrijan, solicitar opiniones para el análisis de los errores (coevaluación) y expresar sugerencias para el cumplimiento de los indicadores acordados con los estudiantes con las vías para el tratamiento a las insuficiencias, los plazos y las formas para evaluar los resultados de las acciones realizadas.

3. Control

Procedimientos:

- Observar sistemáticamente el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades generalizadas de la Matemática, las habilidades intelectuales, los procesos afectivos y comunicativos, en correspondencia con los objetivos de la asignatura y el grado.
- Analizar causas que favorecieron u obstaculizaron los aprendizajes integradores y cómo darle tratamiento.

Al considerar la evaluación como uno de los componentes del PEAM, que a la vez es un proceso y resultado y que debe revelar el nivel de desarrollo cognitivo, valorativo y comunicativo; es necesario planificar, ejecutar y controlar todo el PEAM para que los estudiantes vayan aprendiendo los nuevos contenidos e integrando a los ya adquiridos mediante el trabajo individual o grupal, ejercicios, problemas y tareas docentes que propicien la interdisciplinariedad y la integración de contenidos, con métodos, recursos didácticos y un estilo de comunicación que favorezca el desarrollo del pensamiento lógico, de habilidades matemáticas generalizadas, habilidades intelectuales y de los procesos afectivos y comunicativos para ejecutar la evaluación integradora y se controle en cada etapa para la retroalimentación y el diseño de nuevas acciones para elevar los resultados de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

- Albarelo, F.J., Arri, F.H. y García Luna, A.L. (2021). El uso del Smartphone para la gestión del trabajo colaborativo en estudiantes de educación superior argentina durante la pandemia del COVID-19. *Contratexto*, 5 (36), pp. 65-85.
<https://doi.org/10.26439/contratexto2021.n036.5195>
- Alfonso Moreira, Y. y Valladares González, M. G. (2019). La evaluación integradora con un enfoque inclusivo: una propuesta desde el ejercicio en la formación de profesores. *Roca*, 15(3), 119-129.
- Alonso Conde, A. B., Rojo Suárez, J. y Zúñiga Vicente, J. Á. (2021). Uso de dispositivos móviles en las aulas de la universidad y rendimiento académico: revisión de la literatura y nueva evidencia en España. *Tecnología, Ciencia y Educación*, (20), 7-48. <https://doi.org/10.51302/tce.2021.600>
- Alvarado Romero, C. (2004). *Estrategia de capacitación para el trabajo con las relaciones interdisciplinarias desde la clase de matemática desde la Educación Preuniversitaria*. [Tesis en opción al título académico de Máster Ciencias de la Educación Superior. Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”].
- Álvarez de Zayas, C. (1988). *Fundamentos teóricos para la dirección del proceso de formación del profesional de perfil amplio*. Universidad Central de Las Villas. (Folleto).
- Álvarez de Zayas, C. (1999). Didáctica. *La escuela en la vida*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Álvarez de Zayas, C. (1995). *Epistemología Educativa*. Universidad de Sucre. Bolivia.
- Álvarez Pérez, M. (1997). *La enseñanza y el aprendizaje en favor de la interdisciplinariedad*. Material impreso. La Habana.
- Álvarez Pérez, M. (2001). *La interdisciplinariedad en la enseñanza–aprendizaje de las ciencias exactas en la escuela media*. En resúmenes del Congreso Pedagogía 2001. La Habana.

- Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. Documentos metodológicos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Arnaiz, Barrios, I (2000). *La integración sistemática del contenido como idea metodológica rectora para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. ISP "Manuel Ascunce Domenech", Ciego de Ávila, 2000. En Evento Provincial Pedagogía 2001. (Curso).
- Arnaiz, Barrios, I. (2003). *Modelo de actuación de los docentes para favorecer la aplicación integrada del contenido desde el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciego de Ávila. Cuba. 2003].
- Arnaiz, Barrios, I. y Rodríguez Fernández, M. (2007). La utilización de métodos que impliquen a los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática. Un reto al desempeño de los docentes. *Educación y Sociedad*, 5 (1), pp. 38-52.
- Arnaiz, Barrios, I. y Rivera García, O. (2011). La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Desde una concepción integradora estimuladora. *Educación y Sociedad*, 1 (9), pp. 45-59.
- Arnaiz, I., Ledo, O., Rojas, R.T., Ilizástigui, A., García, J.A., López, A. M y Gutiérrez, D. (2013). *Libro electrónico: Temas de Didáctica de la Matemática*. ISBN 978-959-18-0916-2.
- Arnaiz, I. y García, J.A. (2013). Las habilidades matemáticas generalizadas en la escuela cubana. *Educación y Sociedad*, 11(1),
- Arnaiz, I. y García, J.A. (2014). El desarrollo de habilidades matemáticas generalizadas. Las habilidades “resolver problemas matemáticos” y “demostrar proposiciones matemáticas”. *Educación y Sociedad*, 12 (4),
- Arnaiz, I., García, J.A. y López, A.M. (2015). Reseña de un resultado científico sobre la enseñanza integrada de contenidos matemáticos. *Educación y Sociedad*, 13 (2), pp. 1-15.

- Arnaiz, I., García, J., Rojas, R. y Díaz, M. (2018). *Fundamentos teóricos metodológicos para la aplicación integrada de las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas*. [Resultado del proyecto de investigación: la integración de las habilidades matemáticas en la provincia de Ciego de Ávila].
- Arnaiz Barrios I., García Rodríguez, J. A. y Díaz Gómez, M. (2019). *Exigencias didácticas para potenciar la aplicación integrada de las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas*. Ciencia e Innovación Tecnológica. Editorial Académica Universitaria y Opuntia Brava. Vol. X 978-959-7225-58-4.
- Arnaiz Barrios, I., García Rodríguez, J. A. y Díaz Gómez, M. (2020). Concepción didáctica para aplicar íntegramente las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas. *Educación y Sociedad*, 18(3), pp. 16-29.
- Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García y Torres, P. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Tomo I.
- Ballester, S. (1995). *La sistematización de los conocimientos matemáticos*. Editorial Academia. La Habana.
- Ballester, S., García, J. E., Almeida, B., Álvarez M. M., Rodríguez, M., González, R. A., Villegas E., Fonseca, A. L., y Púig, N. (2016). *Didáctica de la Matemática*. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Barrios Suárez, F., Pedroso Camejo, F. L. y Gibert Benítez, E. M. (2022). Enfoque interdisciplinario de la Didáctica de la Matemática en la formación inicial del profesor de Matemática. *Varona*, 04 (Esp.) Universidad Pedagógica Enrique José Varona. La Habana.
- Bueno, R. y González, W. (2020). Los conceptos matemáticos y sus definiciones para la formación de los ingenieros informáticos para la sociedad. *Universidad y Sociedad*, 12(4), pp. 147-155.

- Breijo, T. [s/a]. *Los estilos de enseñanza y su influencia en la formación de motivos hacia el estudio*. [Tesis en opción del título académico de Máster. UCP "Rafael María de Mendive". Pinar del Río].
- Brito, H., (1987). *Psicología General para ISP*. Tomo 2. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.
- Campistrous, L. (1989). *Sobre las habilidades matemáticas*. En Orientaciones Metodológicas. Matemática 10mo grado. (pp. 5-7). Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1995) *Enseñanza de la Matemática: reflexiones polémicas*. En Pedagogía '95. MINED. La Habana.
- Castro E., Benavides, M. y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Revista iberoamericana de educación Matemática*, 16 (5), pp. 24- 34.
- Castro Ruz, F. (1981). *Discurso pronunciado el 7 de julio de 1981 en la graduación del V Contingente Pedagógico "Manuel Ascunce Domenech"*. Empresa de Impresoras Gráficas. La Habana.
- Chaviano del Toro M., y Rojas Ángel Bello, R. T. (2019). *La tarea docente: una vía para potenciar la aplicación integrada de los contenidos geométricos*. Ciencia e Innovación Tecnológica, Editorial Académica Universitaria y Opuntia Brava. Vol. X 978-959-7225-58-4.
- Chaviano del Toro, M. (2020). *Sistema de tareas docentes para potenciar la aplicación integrada de los contenidos geométricos*. [Tesis en opción al título académico de Máster Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez].
- Consuegra Hernández, U., Morales Molina, Y. y Rojas Ángel Bello, R. T. (2019). La selección de vías racionales para la solución de problemas geométricos. *Universidad y Ciencia*, 8 (1), pp. 8 – 39.
- Consuegra Hernández, U. (2018). *El aprendizaje de los contenidos de Geometría Plana por los estudiantes de la Educación de Adultos*. [Tesis en opción al título académico de Máster. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez].

- Consuegra Hernández, U. (2024). *Los dispositivos móviles como mediadores didácticos para la enseñanza de la Bioestadística y Diseño Experimental en la carrera Ingeniería Agrónoma*. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias de la Educación. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez].
- Davydov, V. (1978). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Danilov, M. A. y Skatkin, M. N. (1981). *Didáctica de la escuela media*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.
- Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias]. Recuperado de: <https://www.researchgate.net/>
- Díaz Gómez. M. (2012). *Sistema de ejercicios para la ejercitación de los estudiantes en los contenidos matemáticos de trabajo con variable del primer año de la carrera pedagógica Biología-Geografía*. [Tesis presentada en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación Superior]. Ciego de Ávila. 2012. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo>.
- Espinosa Jiménez, F. O. (2004). La atención diferenciada desde la clase para favorecer el desarrollo de los estudiantes potencialmente talentosos en Matemática. *Educación y sociedad*, 2 (4), pp. 24-36.
- Espinosa Jiménez, F. O. (2005). *Estrategia de capacitación para profesores de preuniversitario en función del desarrollo de talentos matemáticos*. [Tesis presentada en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación Superior]. Universidad “Camilo Cienfuegos”, Matanzas.
- Espinosa Jiménez, F. O (2002). *Concepción Didáctica para el trabajo con los estudiantes Potencialmente Talentosos en las clases de Matemática de la*

Secundaria Básica. Paquete Tecnológico en el CEDIP del ISP “Manuel Ascunce Domenech”.

Espinosa Jiménez, F. O. (2003). *Metodología para el entrenamiento de estudiantes concursantes en Matemática*. CEDIP del ISP “Manuel Ascunce Domenech”.

Espinosa Jiménez, F. O. y Rodríguez Fernández, M. (2011). La preparación de los profesores para desarrollar talentos matemáticos. *Educación y sociedad*, 9 (2), pp. 46-58.

Espinosa Jiménez F. O., Morales Molina, Y. y Rojas Ángel Bello, R. T. (2019). El aprendizaje de los contenidos geométricos en la Educación de Adultos. *Educación y Sociedad*, 17 (1), pp. 41- 51.

Évora Zamora, F. (2009). *Sistema de ejercicios y problemas sobre polinomios para la preparación inicial de estudiantes concursantes en Matemática de décimo grado del IPVCE “Ignacio Agramonte y Loynaz”*. [Tesis presentada en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación]. UCP “Manuel Ascunce Domenech”.

Fabá Crespo, M. (2007). *Colección de ejercicios para la evaluación de la calidad del aprendizaje de la Matemática en las diferentes educaciones*. [Resultados científicos del proyecto Sistema de Evaluación de la Calidad de la Educación].

Fernández Barrios, M., Jerez González, A. C. y Rodríguez Delgado, C. (2020). La evaluación integradora, su contribución a la formación profesional en la Licenciatura en Educación Agropecuaria. *Mendive*, 18 (4), 18-28.

Ferrer, M. (2010). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias]. Recuperado de: www.eumed.net/tesis/2010/mfv/

Fiallo Rodríguez, J. (2001). *La interdisciplinariedad en el currículo: ¿Utopía o realidad educativa?* Material en soporte magnético.

- Fiallo Rodríguez, J. (1996). *Las relaciones intermaterias: una vía para incrementar la calidad de la educación*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Fiallo Rodríguez, J. (2003). *III Seminario Nacional para educadores*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Galperin, P. (1979). *Sobre la formación de los conceptos de las acciones mentales en Temas de Psicología*. Editorial Orbe. La Habana.
- García, J. A. (1999). *La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal*. Revista de didáctica de las matemáticas, 8 (5), pp. 3-20.
- González, M. O. (1974). *Matemática*. Quinto Curso. Complementos de Aritmética y Álgebra. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- González, A. M. (2001). *El proceso de enseñanza-aprendizaje ¿agente del cambio educativo?* En Nociones de Sociología, Psicología y Pedagogía. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.
- Guilarte, J. (2017). *Sistema de tareas docentes para contribuir al desarrollo de la habilidad resolver ecuaciones*. [Tesis en opción al título de Licenciado en Educación Matemática-Física]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.
- Hernández, B. (2019). Algunas consideraciones sobre la comprensión de los contenidos matemáticos. *Roca*, 15 (4), pp. 23-33.
- Hernández, C., Méndez, J., y Contreras, L. (2021). Memoria de trabajo y habilidades matemáticas en estudiantes de educación básica. *Revista científica*, 5 (40), pp. 63-73.
- Hohenwarter, M. y Hohenwarter J. Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2 en soporte digital.
- ICCP. (1987). *Pedagogía*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Ilizástigui Matos, A. (2010). *La preparación metodológica del profesor general integral de Secundaria Básica para el tratamiento interdisciplinario del*

contenido matemático. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas]. Villa Clara.

Jungk, W. *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

LabarrereSarduy, A. (1989). *La ayuda prematura: causas y consecuencias de un error pedagógico*. En Temas de Psicología para maestros II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Ledo Miralles, O. (2013). *El protagonismo estudiantil en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la secundaria básica*. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas]. UCP" Manuel Ascunce Domenech". Ciego de Ávila.

Ledo Miralles, O., Rojas Ángel Bello, R.T. y González Méndez, M. A. (2020). Procedimientos heurísticos para el tratamiento a problemas matemáticos. *Educación y Sociedad*, 18 (3), pp. 69-83

Lima S. y Rodríguez M. (2010). *La educación matemática en entornos virtuales. Didácticas de la Ciencias. Nuevas perspectivas*. Tercera parte. Sello editor Educación cubana. La Habana.

Lima S. y Rodríguez M. (2013). *La educación matemática desde un enfoque didáctico con tecnologías digitales*. Curso pre evento Pedagogía'2013. La Habana.

Macedo, B. (2001). *La enseñanza de las ciencias en América Latina y el Caribe*. Conferencia central del simposio 4 sobre Didáctica de las Ciencias en el nuevo milenio. Evento Pedagogía 2001. La Habana.

Machado Castellanos, Y. (2013). *Concepción metodológica para el desarrollo de la habilidad calcular en los estudiantes de décimo grado de la escuela militar Camilo Cienfuegos*. [Tesis en opción al título de Licenciado en Educación Matemática-Física]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.

Machado Castellanos, Y. (2020). *La integración de las habilidades matemáticas generalizadas en el contenido Trabajo con Variables de décimo grado*. [Tesis

en opción al título de Máster en Dirección del Proceso Educativo]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.

Machado Castellanos Y., Arnaiz Barrios, I. y Osorio Cruz Y. (2019). Requerimientos metodológicos para la aplicación integrada de las habilidades matemáticas generalizadas en el contenido trabajo con variable. *Universidad y Ciencia*, 8 (Esp.), pp. 476– 484.

Machado Castellanos Y. y Arnaiz Barrios, I. (2019). *La integración de las habilidades matemáticas generalizadas en el contenido trabajo con variables de décimo grado*. Ciencia e Innovación Tecnológica. Editorial Académica Universitaria y Opuntia Brava. VOL X 978-959-7225-58-4.

Martí, J. (1975). *Obras Completas*. Tomo 8. Nuestra América. Editorial de Ciencias Sociales. La Habana.

Martínez, B. (2018). *Sistema de tareas docentes para el desarrollo de la habilidad calcular estadígrafos*. [Tesis en opción al título académico de Máster en Dirección del Proceso Educativo]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.

MINED. (1999). *Programa de Matemática para las Secundarias Básicas seleccionadas*. Curso escolar 1999–2000. La Habana.

MINED. (2007). *Maestría en Ciencias de la Educación. Mención en Educación Secundaria Básica*. Módulo I, II y III Primera y segunda parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

MINED. (1987). *Proyecto. Matemática. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general politécnica y laboral*. (Folleto).

MINED. (1986). *Desarrollo de la Educación en Cuba*. En Pedagogía 86. Palacio de las Convenciones. La Habana. (Conferencia del Ministro de Educación).

Montes de Oca, N. (2001). *La argumentación en el lenguaje matemático: su contextualización en la asignatura Geometría*. [Tesis de Grado]. ICCP. La Habana.

- Morales, Y. (2022). La formación del pensamiento lógico desde la habilidad demostrar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. *Mendive*, 20(4), pp. 121-133.
- Morales Molina Y., Arnaiz Barrios, I. y García Rodríguez, J. A. *Exigencias didácticas para el desarrollo del pensamiento lógico desde la habilidad demostrar en el proceso enseñanza–aprendizaje de la Geometría*. Ciencia e Innovación Tecnológica. Editorial Académica Universitaria y Opuntia Brava.
- Morales, L., García, O., Torres, A. y Lebrija, A. (2018). Habilidades cognitivas a través de la estrategia de aprendizaje cooperativo y perfeccionamiento epistemológico en matemáticas de primer año de universidad. *Formación universitaria*, 11 (2), pp. 45-56.
- Müller, H. (1987). *Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la Enseñanza de la Matemática. Sugerencias para los grupos de investigación*. La Habana. (Material mimeografiado).
- Muñoz, F. (1985). La ejercitación en la enseñanza de la Matemática. *Revista Educación*, XV (59), pp. 39-49.
- Navarro Lores, D. y Samón Matos, M. (2017). Redefinición de los conceptos método de enseñanza y método de aprendizaje. *EduSol*, 17 (60), pp. 35-46.
- Osorio, Y. (2014). *Sistema de ejercicios para propiciar el desarrollo de la habilidad calcular fracciones algebraicas*. [Tesis en opción al título de Licenciado en Educación Matemática-Física]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.
- Pérez Cruz, J. M. (2012). *La ejercitación de los estudiantes del primer año de la carrera de ciencias exactas para potenciar el aprendizaje de la Matemática*. [Tesis en opción al título de Máster en Ciencias de la Educación Superior]. Universidad de Ciencias Pedagógicas “Manuel Ascunce Domenech”, Ciego de Ávila.

- Pérez Ugartemendía, E. (2000). *Metodología para el tratamiento de las construcciones auxiliares en la Geometría de la Secundaria Básica*. [Trabajo de Diploma]. UCP “Manuel Ascunce Domenech”, Ciego de Ávila.
- Petrovsky, A. V. (1985). *Psicología General*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana
- Pla, R. (2003). *Modelo del profesional de la educación para asumir las tendencias integradoras de la escuela contemporánea*. En Pedagogía 2003. Curso pre-evento.
- Pla, R., Ramos, J., Arnaiz, I., García, A., Castillo, M., Soto, M. y Cruz, M. (2012). *Concepción de la pedagogía como ciencia desde un enfoque histórico cultural*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Ramírez Agudelo, J.D. (2017). *El uso de dispositivos móviles dentro del aula de clase en el proceso de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de grado décimo de la Escuela Normal Superior de Caldas*. [Tesis de grado]. Universidad de Pereira.
- Ramos Bañobre, J. (2001). *La enseñanza–aprendizaje de las ciencias como investigación. Una concepción didáctica integradora*. Curso en Pedagogía ‘2001. La Habana.
- Rivera García, O. (2012). *Concepción integradora y estimuladora para la evaluación de los estudiantes en la asignatura Fundamentos de la Matemática Escolar I de la carrera Matemática-Física*. [Tesis en opción al título de Máster en Ciencias de la Educación Superior]. UCP “Manuel Ascunce Domenech”, Ciego de Ávila, 2012.
- Rivero, L. (2019). *Sistemas de tareas docentes para resolver ecuaciones con radicales en el décimo grado*. [Tesis en opcional título de Licenciado en Educación Matemática-Física]. Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez.
- Rodríguez Fernández, M. (2008). *Estrategia de capacitación para los docentes de Ciencias Exactas de los IPUEC de Ciego de Ávila dirigida a potenciar la*

aplicación integrada del contenido matemático. [Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación Superior]. Universidad “Camilo Cienfuegos”, Matanzas.

Rodríguez, O., Rodríguez, M., y Hernández, A. (2018). Desarrollo de habilidades matemáticas en un contexto de inclusión. *Varela*, 18 (50), pp. 191– 201.

Rojas, R., Arnaiz, I., García, J., Morales, Y., Martínez, B., y Díaz, M. (2019). *Diagnóstico del estado actual de la aplicación integrada de las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas*. [Resultado del proyecto de investigación: la integración de las habilidades matemáticas en la provincia de Ciego de Ávila]. Dictaminado por el Consejo Científico de la Facultad de Ciencias Pedagógicas de la Universidad de Ciego de Ávila.

Romero Escobar, E. S. (2013). *La ejercitación en el aprendizaje de la Matemática*. [Trabajo de graduación para optar por el grado académico de Licenciado en Educación de la Matemática y Física]. Universidad de Galileo, Guatemala.

Salazar, A. (2015). *Sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad de relacionar gráficos y sus propiedades*. [Tesis en opción al título de Licenciado en Educación Matemática-Física]. Universidad de Ciego de Ávila. Máximo Gómez Báez.

Sánchez Arrizabalaga, E. (2019). *Sistema de tareas docentes para favorecer el desarrollo de la habilidad resolver problemas matemáticos*. [Tesis en opción al título académico de Máster]. Universidad de Ciego de Ávila. Máximo Gómez Báez.

Silvestre Oramas, M. (1999). *Aprendizaje, educación y desarrollo*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Talízina, N. F. (1987). *Métodos para la creación de programas de enseñanza*. Vicerrectoría Docente. Universidad de Camagüey.

Talízina, N. F. (1988). *Procedimientos iniciales del pensamiento lógico*. Vicerrectoría Docente. Universidad de Camagüey.

Talízina, N. F. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. Editorial Ángeles. México.

Talízina, N. F. (1998). *Psicología de la Enseñanza*. Biblioteca de Psicología Soviética. Editorial Progreso. Moscú.

Torres Fernández, P. (1992). Hacia una metodología de la enseñanza de la Matemática. ¿Cuál? *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*. No. 14, pp.21-31. La Habana.

Torres Fernández, P. (2000). *La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos*. Material publicado por el ISP “Enrique José Varona”. La Habana.

Varela Morales, F. (1817a). *Discurso leído en la Primera Junta de la Sociedad Patriótica de la Habana a la que asistió después de su admisión a dicho cuerpo*. Citado por los compiladores Eduardo Torres Cueva, Jorge Ibarra y Mercedes García. Obras de Félix Varela. Tomo I. Editora Política de la Habana. 1991.

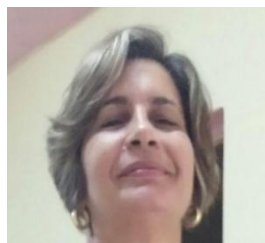
Varela Morales, F. (1817b). *Introducción a la Quinta Edición de las Lecciones de Filosofía*. Citado por los compiladores Eduardo Torres Cueva, Jorge Ibarra y Mercedes García. Obras de Félix Varela. Tomo I. Editora Política de la Habana. 1991.

Varela, C. M., y Alvarado, A. L. (2019). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Didáctica de la Matemática desde un enfoque ciencia tecnología sociedad. *Conrado*, 15 (68), pp. 259-262.

SOBRE LOS AUTORES



Ibrahim Arnaiz Barrios, Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular. Actualmente es profesor de Matemática en la Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez. Es miembro del tribunal de cambio de categorías para las especialidades de Matemática y Física. Posee varias distinciones y medallas.



Odalis Ledo Miralles, Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez. Se desempeña como Metodóloga de la dirección de formación de Pregrado de dicha universidad. Es miembro del tribunal de cambio de categoría para la especialidad de Matemática y del claustro del doctorado en Ciencias de la Educación. Posee varias distinciones y medallas.



José Antonio García Rodríguez, Máster en Ciencias de la Educación Superior. Profesor Auxiliar. Profesor de Maestría en Ciencias de la Educación, Actualmente es profesor de Matemática en la Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez. Posee varias distinciones y medallas.

ISBN: 978-959-85024-4-8



EdUNICA

Editorial Universitaria Ciego de Ávila